

# VERTIKALE TEMPERATURSCHICHTUNG IM BODEN UND EIN MATHEMATISCHES MODELL DERSELBEN

von

R. WAGNER und L. TAKÁCS

## I.

### Temperaturzonen des Bodens

von R. WAGNER

**Summary:** (*Vertical stratification of the soil temperature and its mathematical model — I. Vertical zones of the soil temperature.*)

On the basis of the particularities of the vertical thermal conduction, taking place in the soil, the following temperature zones can be found:

- a) daily inversion layer showing daily divergence- and convergence-levels of thermal conduction;
- b) daily active layer in whose lower level practically no daily fluctuations of the temperature can be found;
- c) annual inversion layer in which divergence- and convergence-levels can be found in the effect of the annual temperature-wave;
- d) annual active layer, where in the lower layer no annual fluctuation of the temperature can be found.

Under that one is the layer  $e$ , the zone ruled by the geothermic gradient.

**Zusammenfassung:** Auf Grund der Besonderheiten der vertikalen Wärmeleitung kann man im Boden die folgenden Temperaturzonen unterscheiden:

- a) tägliche Inversionsschicht, in welcher Divergenz- und Konvergenzschichten der Wärmeleitung täglich auftreten;
- b) tägliche Aktivitätsschicht, an deren unteren Grenze praktisch keine Tagesschwankung der Temperatur mehr auftritt;
- c) jährliche Inversionsschicht, in welcher als Auswirkung der jährlichen Temperaturwelle Divergenz- und Konvergenzschichten auftreten;
- d) jährliche Aktivitätsschicht, an deren unteren Grenze die Jahresschwankung der Temperatur nicht mehr nachweisbar ist.

Weiter unter befindet sich die  $e$ -Schicht, eine Zone, in welcher der geothermische Gradient vorherrscht.

Der Boden entsteht durch gegenseitiges Zusammenwirken des Grundgesteins, der Orographie, des Klimas und der Lebewesen, ein Vorgang, für deren Erforschung die Bodenkunde zuständig ist. Zur Untersuchung des Bodens werden physikalische und chemische Methoden herangezogen, hingegen ist die Erforschung der im Boden sich befindenden Lebewesen eine Aufgabe der Biologie, namentlich der Bodenbiologie.

Mit der Messung der Bodentemperaturen befassen sich die Klimatologen, und zwar einerseits aus dem Grunde, dass diese Untersuchungen mit Hilfe von klimatologischen Methoden durchgeführt werden, und andererseits deshalb, weil die Wärmewirtschaft eines Bodens grundlegend durch meteorologische Faktoren bestimmt wird. Die Temperaturen der obersten, 10 bis 20 m starken Bodenschicht sind in erster Reihe nicht vom geothermischen Gra-

dienten abhängig, sondern hauptsächlich vom Strahlungshaushalt. Dabei kommt aber eine Rolle auch der Lufttemperatur, der Luftfeuchtigkeit, der Niederschlagsmenge und den Niederschlagsarten (auch den Mikroniederschlägen), der Luftbewegung, der Verdunstung, mit einem Worte, der Witterung zu.

Das Klima spielt eine wesentliche Rolle in der Bodenentwicklung: dabei wird durch den Boden, als Substrat, die Ausgestaltung des Mikroklimas bestimmt und übt dadurch eine Rückwirkung auf die atmosphärischen Vorgänge aus.

Durch Verschiedenheiten in der Bodenbedeckung und in der Lage gegenüber den Himmelsrichtungen entstehen Unterschiede im Wärmehaushalt auch solcher Böden, deren physikalische Eigenschaften die gleichen sind. Die Vegetation spielt durch ihre Abfälle und durch ihre Wurzeln eine Rolle in der Bodenentwicklung und führt dabei zum Ergebnis, dass die ursprünglichen physikalischen Eigenschaften des Bodens eine Veränderung erfahren. Eine offenbare Folge besteht darin, dass die Bodentemperaturverhältnisse des Festlandes sich sehr wechselvoll gestalten.

Angaben über Temperaturverhältnisse des Bodens liefern die an klimatologischen Stationen angebrachten Bodenthermometer, und dieselben sind dazu geeignet, zur Schilderung des Jahresganges der Bodentemperatur eines gewissen Ortes herangezogen zu werden. Besitzt man Bodenthermometer, welche in entsprechender Dichte und Tiefe angebracht sind, so können diejenigen Niveaus festgestellt werden, in welchen noch eine Temperaturumkehr im Laufe des Jahres auftritt. Man erhält eine Antwort auf die Frage, in welcher Tiefe eine jährliche Temperaturschwankung nicht mehr vorhanden sei.

Hingegen kann man im Wege von täglich drei oder vier Beobachtungen den Tagesgang der Bodentemperatur sowie den Betrag und den Zeitpunkt des täglichen Höchst- und Tiefstwertes nicht erkunden. Doch kann das Niveau festgestellt werden, in welchem die Tageswelle der Temperatur eine derartige Verflachung erfährt, dass sich praktisch keine Tagesschwankung mehr nachweisen lässt.

Die Tageswellen der Bodentemperatur können nur durch Beobachtungen untersucht werden, die in kleinen Zeitabständen, d. h. stündlich ausgeführt oder registriert werden. Solche Angabenreihen findet man aber nur selten an den klimatologischen Stationen. Ein zur Beschreibung des Tagesganges der Bodentemperatur geeignetes Beobachtungsmaterial trifft man meistens nur unter den Ergebnissen der mikroklimatologischen bzw. agrarmeteorologischen Forschungen. Dies ist auch verständlich, denn die Einflüsse des Wärmehaushaltes des Bodens kommen gerade im mikroklimatischen Raume zur Geltung.

In der oberen Bodenschicht ändert sich die Richtung des vertikalen Temperaturgradienten entsprechend der Ein- und Ausstrahlung. Der Temperaturgradient besitzt während eines Teiles des Tages einen positiven Wert (ist von der Oberfläche gegen die Tiefe gerichtet), im übrigen Teil des Tages ist er negativ. Betrachtet man die Bodenoberfläche, so hat man einen positiven Wert des Temperaturgradienten im Zeitraum von Sonnenaufgang (Zeitpunkt des Temperaturminimums an der Bodenoberfläche) bis zum Eintritt des Temperaturmaximums, der nach dem Höchststand der Sonne sich ereignet.

Nach dem Zeitpunkte des Temperaturmaximums an der Bodenoberfläche befindet sich die wärmste Bodenschicht unterhalb der Bodenoberfläche, und von dieser Schicht aus erfolgt eine Wärmeleitung sowie nach der Oberfläche als auch nach unten hin. Dieser wärmste Punkt des Vertikalen kann mit Recht als

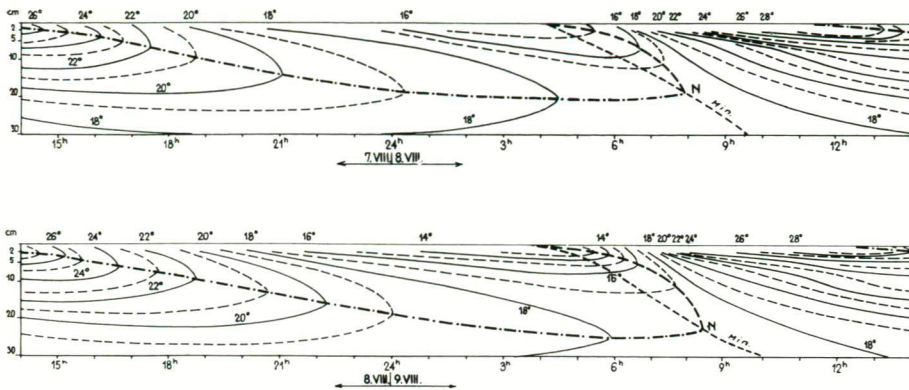


Abb. 1. *Isoplethen der Bodentemperatur*

Bükk-Gebirge, Seehöhe 700 m. Fette ausgezogene Linie = Kaltniveau, Konvergenzlinie. Fette Resultatenlinie = Warmniveau, Divergenzlinie. Punktierte Linie = tägliche Minimumlinie. N = neutraler Punkt.

*Inversionspunkt* bezeichnet werden, und das entsprechende Niveau soll ein *Inversionsniveau* genannt werden. Auch nach Sonnenaufgang kann ein Inversionspunkt im Boden beobachtet werden, als nach dem Eintritt des Oberflächenminimums infolge der Einstrahlung die Temperatur der Oberfläche ansteigt und innerhalb des Bodens ein relativ kältester Punkt entsteht, zu dem von beiden Richtungen (von oben her und aus der Tiefe) Wärme zugeleitet wird. Dieser Punkt ist nun ebenfalls ein Inversionspunkt. Bei der Behandlung eines vertikalen Bodenquerschnittes nennen wir einen Inversionspunkt, der im Laufe der Oberflächenabkühlung entsteht, einen *Warmpunkt* und das entsprechende Niveau ein *Warmniveau*; hingegen soll der sich nach Sonnenaufgang ausbildende Inversionspunkt bzw. das entsprechende Inversionsniveau als ein *Kaltpunkt* bzw. ein *Kaltniveau* bezeichnet werden.

In Abhängigkeit von der Wärmeaufnahme bzw. Wärmeabgabe der Bodenoberfläche sinkt sowohl das *Warmniveau* wie auch das *Kaltniveau* stetig nach unten, und diese tägliche Bewegung kann mit einer Punktenreihe, d. h. mit einer Linie beschrieben werden. Diese Linien können in einfachster Weise mit Hilfe der Temperaturisoplethen festgestellt werden. Die zur Oberfläche senkrechten Tangenten der Isoplethen berühren die Isoplethen in den Inversionspunkten. Punkte, aus denen ausgehend sowohl nach oben als auch nach unten niedrigere Temperaturen angetroffen werden, sind die Warmpunkte; Punkte aus denen ausgehend man in beiden Richtungen höhere Temperaturen begegnet, sind die Kaltpunkte. Daraus geht hervor, dass ein Warmpunkt gleichzeitig ein *Divergenzpunkt* darstellt, und ein Kaltpunkt gleichzeitig ein *Konvergenzpunkt* ist. Bei der Behandlung des Tagesganges eines Warmniveaus bzw. eines Kaltniveaus sprechen wir von *Divergenzlinien* und *Konvergenzlinien*.

Durch Konvergenz- und Divergenzlinien werden Gebiete mit verschiedenen Vorzeichen des vertikalen Temperaturgradienten des Bodens voneinander getrennt und gleichzeitig bedeuten dieselben eine Folge von Punkten, in welchen der Temperaturgradient den Wert  $0^\circ$  besitzt.

Die Lebensdauer der Temperaturinversionen im Boden ist im Sommer

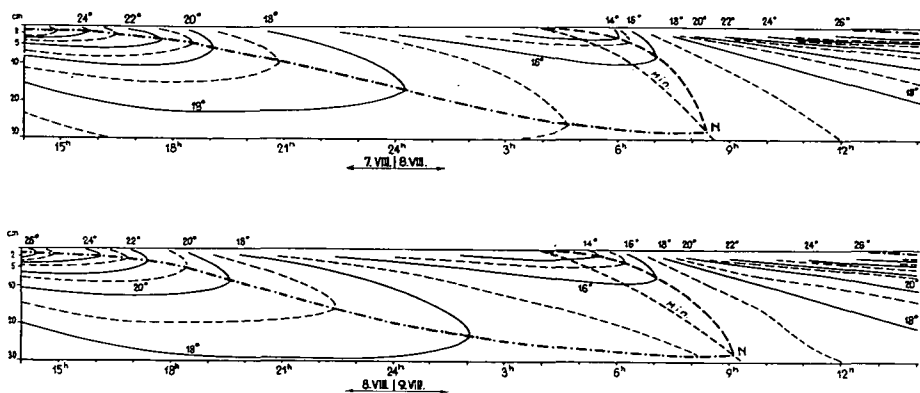


Abb. 2. *Isoplethen der Bodentemperatur*

Bükk-Gebirge, Seehöhe 700 m. Himmelsrichtung des Hanges 316°. Zeichenerklärung s. Abb. 1.

und Winter verschieden. Im Sommer können die Divergenzlinien, im Winter die Konvergenzlinien eine längere Zeit hindurch verfolgt werden. Bei heiterem Wetter können im Laufe eines einzigen Tages sowie die Warmniveaus wie auch die Kaltniveaus aufgefunden werden, und sie sind sogar zumindest in den Morgenstunden und den frühen Vormittagsstunden notwendigerweise beide zugegen, somit besteht eine *Doppelinversion* im Boden. Die Bedingung einer Auflösung des Inversionszustandes besteht namentlich darin, dass die Divergenz- und Konvergenzlinie in einem Punkte zusammentreffen sollen. Wir wollen diesen Punkt als den *täglichen neutralen Punkt des Bodens* bezeichnen. Nach dem erfolgten Zusammentreffen des Warm- und Kaltniveaus nimmt die Wärmeleitung des Bodens eine einheitliche Richtung auf.

Die Zeitdauer des Bestehens einer Inversion im Boden kann somit dadurch festgestellt werden, dass man den Zeitpunkt des Temperaturmaximums an der Bodenoberfläche, sowie den Zeitpunkt des Eintrittes des täglichen neutralen Punktes festlegt; der letztere Zeitpunkt liegt im Sommer meistens in den frühen Vormittagsstunden. Vom Eintritt des Temperaturmaximums an der Oberfläche bis zum Sonnenaufgang gibt es nur eine Inversionsschicht im Boden, namentlich ein Warmniveau, in der Gestalt einer Divergenz. Das Kaltniveau das sich nach Sonnenaufgang ausbildet, sinkt verhältnismässig rasch bis zum Warmniveau und in der Zwischenzeit besteht eine Doppelinversion.

Infolge der langsamen Abkühlung der Bodenoberfläche hat man am Nachmittag ein langsames, am Abend aber ein beschleunigtes Absinken des Warmniveaus. Nach dem Erscheinen des Kaltniveaus verbleibt das Warmniveau in annähernd gleicher Lage, gegebenenfalls tritt eine leichte Hebung vor dem Zusammentreffen mit dem Kaltniveau auf. Das Warmniveau gibt ständig Wärme ab, somit muss zum Zeitpunkt der Auflösung dieses Niveaus die tägliche Tiefsttemperatur der Bodenschicht eintreten. Demzufolge fällt der *neutrale Punkt* in die Minimumlinie, und zwar bildet er den *wärmsten Punkt der Minimumlinie*. Damit erhält man die Möglichkeit, den Zeitpunkt und die Tiefe des Auftretens des neutralen Punktes mit Hilfe einer einfachen Interpolation, bzw. mit einer graphischen Methode festzustellen. Für das letztere



Verfahren kann eine Tautochronendarstellung in ausgezeichneter Weise verwendet werden.

Die Oberschicht des Bodens, deren untere Begrenzung durch die niedrigsten Punkte des Warm- oder Kaltniveaus festgelegt werden kann, soll als *tägliche Inversionsschicht des Bodens* bezeichnet werden. Diese Schicht ist das Gebiet von Wärmeströmen wechselnder Richtung, deren Einflüsse nicht nur mikrometeorologisch wahrgenommen werden können, sondern auch eine Rolle in der Bodenentwicklung, in der Gestaltung der Lebewelt des Bodens und der mikromorphologischen Formen besitzen.

Die Dicke der täglichen Inversionsschicht des Bodens ist selbst für den gleichen Boden veränderlich infolge der Einflüsse, die auf der Bodenoberfläche einwirken. Eben deshalb verändert sich die Tiefe des täglichen neutralen Punktes von Tag zu Tag, gemäss der Wettergestaltung.

Dabei ist die Ein- und Ausstrahlung von Bedeutung, die in engem Zusammenhang mit der jährlichen Veränderung der Sonnendeklination steht, und so ist es erklärlich, dass die Dicke der täglichen Inversionsschicht ebenfalls eine Jahresperiode besitzt.

Im Wärmehaushalt des Bodens findet man einen wesentlichen Unterschied zwischen Sommer- und Winterhalbjahr. Der Wärmestrom ist im Sommer von der Bodenoberfläche gegen die tieferen Bodenschichten gerichtet. Als eine Folge der täglich sich ausbildenden Inversionen kommt in der täglichen Inversionsschicht des Bodens vorübergehend ein negativer Temperaturgradient zu Stande. Im Winter ereignet sich der entgegengesetzte Zustand. Der Wärmestrom ist von unten nach oben gerichtet, nur die tägliche Erwärmung der Oberfläche verursacht vorübergehend einen positiven Wert des Temperaturgradienten. Demzufolge geht im Winterhalbjahr nicht die Minimumlinie über den neutralen Punkt, sondern die Maximumlinie. In dieser Jahreszeit bildet somit der neutrale Punkt einen Punkt der Maximumlinie, und zwar *den kältesten Punkt der Maximumlinie*.

Die *tägliche Inversionsschicht* kann als die oberste klimatische Schicht des Bodens betrachtet werden.

Nun ist es aber allgemein bekannt, dass eine Tagesschwankung der Temperatur auch noch unterhalb der Inversionsschicht festgestellt werden kann. Wenn in der Tautochronendarstellung die tägliche Maximum- und Minimumlinien so verlängert werden, dass sie sich überschneiden, so erhält man diejenige Tiefe, in der die Tagesschwankung der Temperatur nicht mehr nachgewiesen werden kann. Freilich kann diese Tiefe auch im Wege unmittelbarer Messungen festgestellt werden.

In gewissen Abschnitten des Jahres, in welchen eine Erwärmung oder Abkühlung des Bodens stattfindet, kann eine tägliche Temperaturzunahme oder Abnahme von 0,1 oder sogar 0,2 °C auftreten. Dies kann in der Praxis nicht als eine Tageswelle der Temperatur angesehen werden, somit kann in diesen Schichten ein Tagesgang der Temperatur nicht mehr nachgewiesen werden.

Unterhalb der täglichen Inversionsschicht befindet sich die *tägliche Aktivitätsschicht*, an deren unteren Grenze eine Tagesschwankung der Temperatur nicht mehr vorhanden ist. Für diese Schicht ist es kennzeichnend, dass die Wärmeleitung nur einer einzigen Richtung erfolgt, und zwar in der sommerlichen Jahreszeit von oben nach unten, in der Winterzeit von unten nach oben. In dieser Schicht gibt es somit eine Umkehr in der Richtung des Wärmestro-

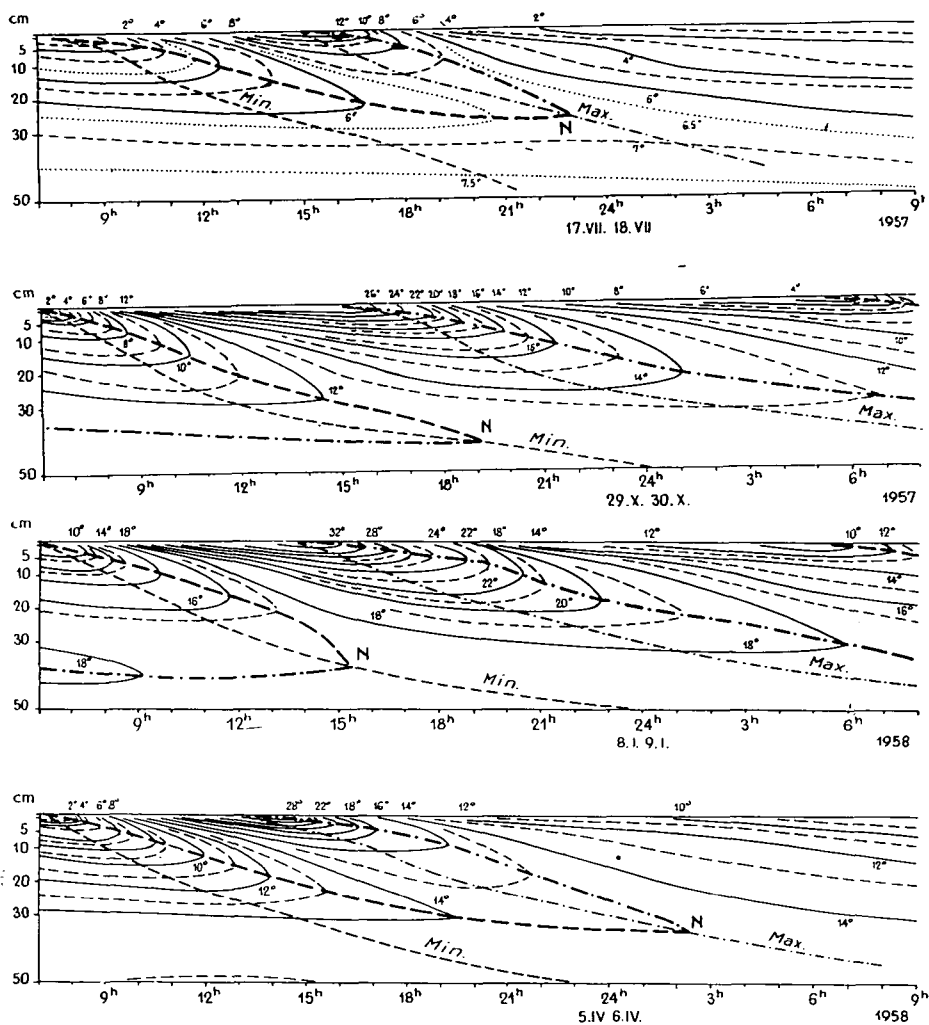


Abb. 3. Isoplethen der Bodentemperatur  
Valdivia, Chile. Zeichenerklärung s. Abb. 1. Die dünne Resultatenlinie ist  
die tägliche Maximumlinie.

mes nur zweimal im Jahre, an den Tagen, wo ein Umschlag des Wärmestromes im Frühjahr und Herbst eintritt.

Die Schichtdicke erfährt im Laufe des Jahres eine stetige Veränderung, sie besitzt einen Jahresgang, und zwar ist sie, wie man dies auch bei der täglichen Inversionsschicht beobachtet hatte, im Winter dünner als im Sommer. Nach den Bodentemperaturbeobachtungen in S z e g e d kann die Mächtigkeit der täglichen Inversionsschicht im Januar mit 8—10 cm, im Juli mit 28—33 cm, und die der täglichen Aktivitätsschicht in den gleichen Zeitpunkten mit 20—25 bzw. 65—70 cm angesetzt werden. Somit beträgt die Mäch-

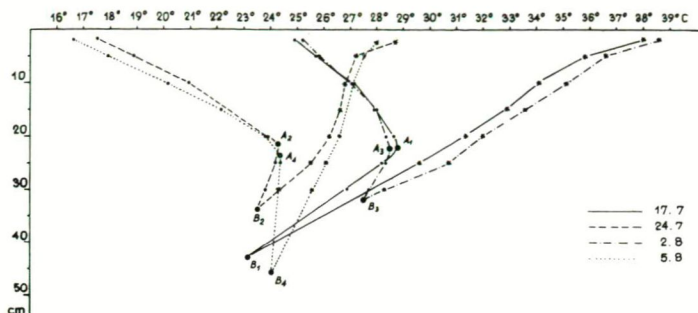


Abb. 4. Tautochronen der Bodentemperatur. Kopáncs, 1958.

tigkeit der täglichen Aktivitätsschicht das zweieinhalb bis dreifache der Mächtigkeit der täglichen Inversionsschicht.

In Abhängigkeit von der Wettergestaltung verändert sich die Dicke der täglichen Inversionsschicht, und auch die Dicke der täglichen Aktivitätsschicht. Für die Abb. 4 wurden tage mit kleiner und mit grosser Temperaturamplitude ausgewählt und die Linien der Minima und Maxima der einzelnen Schichten wurden mit Tautochronen dargestellt. Die Punkte A bezeichnen in dieser Abbildung die Niveaus der täglichen Inversionsschichten und die Punkte B dieselben der täglichen Aktivitätsschichten.

Die täglichen Inversionsschichten können infolge der Witterung, der Jahreszeit, der Bodenbeschaffenheit, der Exposition usw. sehr verschiedene Mächtigkeiten besitzen. Doch gibt es auch in der Dauer der Inversionen einen Unterschied. Die Dauer derselben ist von der Länge der Tage und Nächte abhängig. Aus den hier angeführten Abbildungen, sowie auch aus den Abbildungen und Tabellen der Arbeit WAGNER (1965) geht es ebenfalls hervor, dass eine Inversion nicht notwendigerweise 24 Stunden hindurch anzudauern braucht, d. h. es gibt Tagesstunden, in welchen die Wärmeleitung nur in einer Richtung vor sich geht, und zwar in der Sommerzeit von oben nach unten und in der Winterzeit von unten nach oben. In diesen Stunden gibt es einen unmittelbaren Wärmeaustausch zwischen der Bodenoberfläche und der unteren Grenze der täglichen Aktivitätsschicht.

In der unterhalb der täglichen Aktivitätsschicht befindlich Bodenschicht bzw. Grundgesteinschicht (namentlich machen wir zwischen diesen beiden Begriffen keinen Unterschied und wir wollen einheitlich die Bezeichnung „Boden“ verwenden) kann nach unseren Voraussetzungen keine tägliche Temperaturschwankung festgestellt werden. Eine gemeinsame Eigenschaft dieser vertikalen Gebiete besteht darin, dass es hier nur eine jährliche Temperaturschwankung gibt, im Gang der Temperatur kann nur eine Jahresperiode beobachtet werden. In der Tiefe verflachen sich die Jahreswellen der Bodentemperatur und an der unteren Grenze dieser Zone hören dieselben praktisch auf. Im Niveau, wo eine Jahresschwankung der Temperatur nicht mehr beobachtbar ist, kann die Untergrenze der jährlichen Aktivitätsschicht angenommen werden. Die Lage dieser Grenze ist freilich in den einzelnen Jahren infolge der Witterung verschieden, sie kann nach oben oder nach unten verschoben werden. Ihre durchschnittliche Tiefe kann aus den für mehrere Jahrzehnte gebildeten Durchschnittswerten der Bodentemperaturbeobachtungen einer klimatologischen Station festgestellt werden.



Unterhalb der jährlichen Aktivitätsschicht folgt schon das Vorherrschen des geothermischen Gradienten, dessen Geltendwerden bis zur Bodenoberfläche eben durch die Strahlungsenergie der Sonne gehemmt wird, und zwar in einem Ausmasse, der im Laufe des Jahres und an den verschiedenen Punkten der Erdoberfläche verschieden ausfällt.

Zwischen der jährlichen Aktivitätsschicht und der täglichen Aktivitätsschicht befindet sich die *jährliche Inversionsschicht*, deren Mächtigkeit annähernd durch den *jährlichen Neutralpunkt* angegeben werden kann. Innerhalb der jährlichen Inversionsschicht findet man die jährliche Divergenz- bzw. Konvergenzlinie, d. h. die Reihe der Tiefenpunkte der jährlichen Warm- und Kaltniveaus.

Auf Grund der 40jährigen (1911—1950) Pentadenmittelwerte der Bodentemperatur in *B u d a p e s t* (nach BACSÓ—KAKAS—TAKÁCS 1953) sowie auf Grund der täglichen Beobachtungen der Bodentemperatur aus den Jahren 1940—1944 in *B u d a p e s t* — *M á t y á s f ö l d* haben wir die Isoplethen der Bodentemperaturen entworfen (Abb. 5). Die Vereinigung der Angaben der beiden Stationen wurde dadurch erforderlich, dass die 40jährigen Mittelwerte sich nur bis zu einer Tiefe von 4 m erstrecken, die Beobachtungen in *M á t y á s f ö l d* hingegen bis zu einer Tiefe von 10 m reichen. Natürlich mussten die Werte für die Schicht von 40 bis 10 m an die 40jährigen Mittelwerte angepasst werden.

Somit kann das Zahlenmaterial der Isoplethendarstellung nicht als vollkommen homogen angesehen werden, hingegen war es geeignet dazu, dass in der Abbildung die jährlichen Konvergenz- und Divergenzlinien sowie der jährliche neutrale Punkt vermerkt wurde. In der Abbildung werden die Richtungen der Wärmeströme durch Pfeile angedeutet, die Breite der Pfeile ist proportional zum Temperaturgradienten.

Aus der Abbildung können die wichtigsten Merkmale der jährlichen Inversionsschicht abgelesen werden. Es kann festgestellt werden, dass (abgesehen von der täglichen Inversionsschicht) diese Schicht stets eine Inversion enthält. Von Frühjahr bis zur Mitte des Sommers wird eine einheitliche Richtung des Wärmestromes von der Konvergenzlinie gestört, in den übrigen Abschnitten des Jahres gibt es eine Doppelinversion, und im Nachwinter kann es sogar eine dreifache Inversion geben. *Die jährliche Divergenzlinie ist kürzer als die Konvergenzlinie*, die Lebensdauer der Divergenzlinie ist kürzer als ein Jahr, die der Konvergenzlinie beträgt annähernd ein Jahr, kann aber auch länger ausfallen: Hieraus folgt, dass *der jährliche Neutralpunkt sich im verhältnismässig kältesten Punkte der jährlichen Maximumlinie befindet*.

Für die Darstellung der Temperaturschichtung des Bodens wurde eine schematische Abbildung entworfen (Abb. 6). Dabei wurden die schon oben erwähnten Angaben von *Budapest* und *Mátyásföld* und ausserdem noch das Beobachtungsmaterial des meteorologischen Observatoriums der Universität *Szeged* herangezogen. Nach der Abbildung können innerhalb des Bodens, bzw. innerhalb des unter den Einwirkungen der klimatischen Faktoren stehenden Grundgesteins, vier Schichten unterschieden werden, welche an der Abbildung mit *a*, *b*, *c* und *d* bezeichnet wurden. Die Merkmale der einzelnen Schichten können in folgender Weise zusammengefasst werden:

a) *Tägliche Inversionsschicht*. Innerhalb dieser Schicht bildet sich täglich eine Inversion des Wärmestromes aus, d. h., es bilden sich Divergenz- und



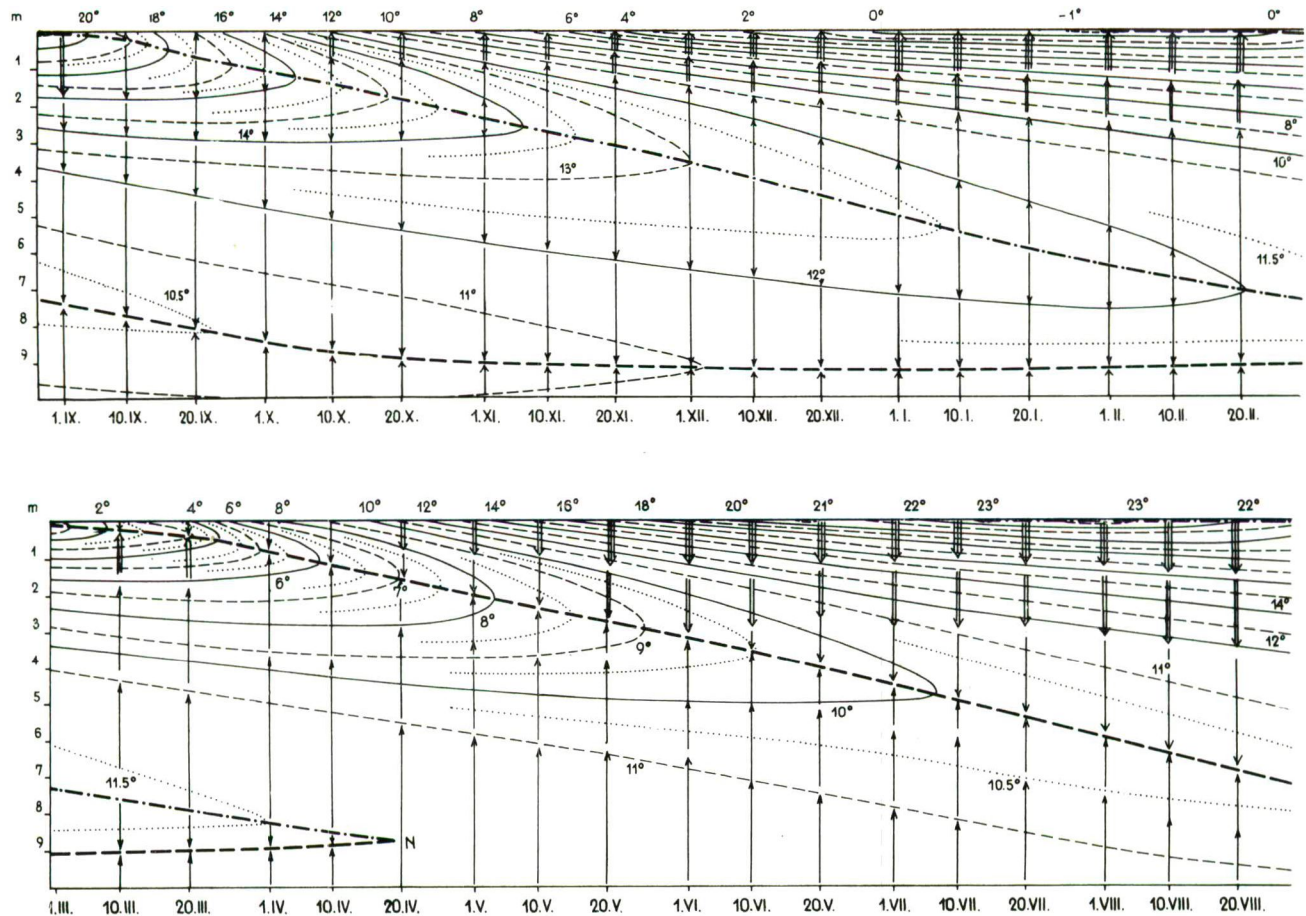


Abb. 5. Jahresisoplethen der Bodentemperatur

Fette unterbrochene Linie = jährliches Kaltniveau, Konvergenzlinie. Fette Resultatenlinie = jährliches Warmniveau, Divergenzlinie. N = jährlicher neutraler Punkt. Die Richtung des Wärmestromes wird durch Pfeile angedeutet, deren Breite proportional zu dem vertikalen Temperaturgradienten ist.

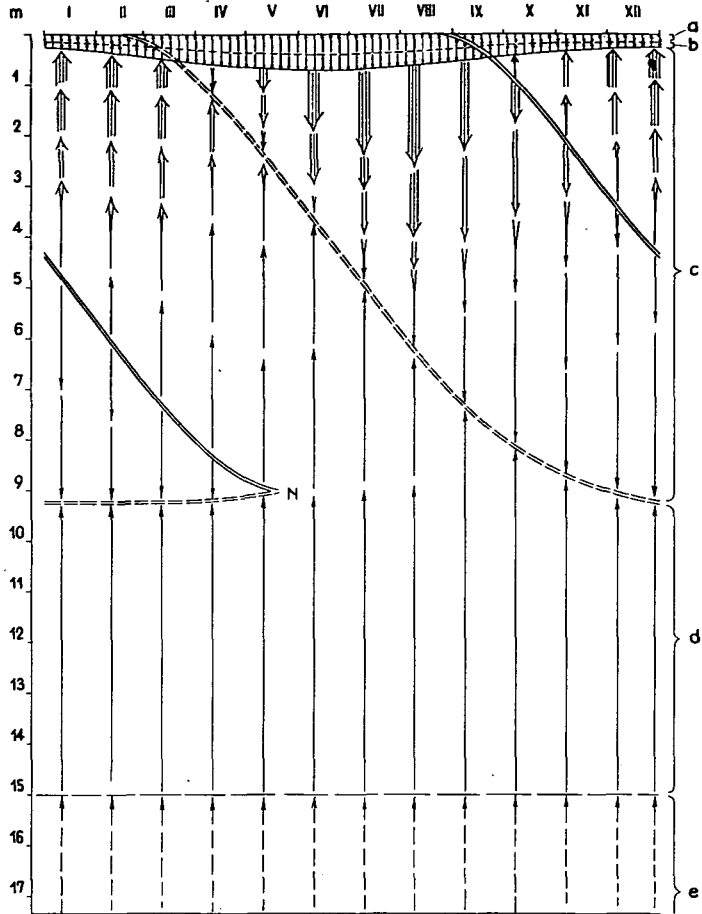


Abb. 6. *Temperaturschichtung des Bodens*

Parallele stetige Kurven = jährliches Warmniveau, Divergenzlinie.

Parallele unterbrochene Kurven = jährliches Kaltniveau, Konvergenzlinie.

Konvergenzniveaus der Wärmeleitung und dieselben treffen sich in dem Neutralpunkt.

Die Mächtigkeit der täglichen Inversionsschicht ist im Laufe des Jahres Veränderungen unterworfen, im Winter ist sie geringer, im Sommer ist sie grösser.

b) *Tägliche Aktivitätsschicht.* Hier erfolgt die Wärmeleitung im Sommerhalbjahr von oben nach unten, im Winterhalbjahr von unten nach oben. Die untere Grenze der Schicht bildet dasjenige Niveau, in welchem die Tageschwankung der Temperatur praktisch nicht mehr vorhanden ist.

c) *Jährliche Inversionsschicht.* Innerhalb dieser Schicht befinden sich die jährlichen Divergenz- und Konvergenzlinien, welche sich im jährlichen Neutralpunkt treffen. Die Tiefe dieser Schicht beträgt (nach den Angaben der

vorliegenden Arbeit) etwa das 30fache der Tiefe der täglichen Inversionsschicht.

d) *Jährliche Aktivitätsschicht*. Die Wärmeströmung ist hier stets von der Tiefe nach der Oberfläche gerichtet. Die untere Grenze der Schicht ist durch das Aufhören der Jahresschwankung der Temperatur gekennzeichnet.

Unterhalb dieser Schicht befindet sich die mit *e* bezeichnete Zone, in welcher der geothermische Gradient ungestört zur Geltung gelangt.

Wie ersichtlich, wurden die thermischen Schichten des Bodens auf Grund der Richtung der Wärmeleitung klassifiziert. Die vier Schichten sind an verschiedenen Punkten der Erde (hauptsächlich jenseits der Polarkreise) einer Entstellung unterworfen, sie sind aber grundsätzlich überall vorhanden.

Zweifellos befindet sich die Schicht *a* innerhalb und nur innerhalb der Schicht *b*, und ebenso befindet sich die Schicht *b* innerhalb der Schicht *c* und die Schicht *c* innerhalb der Schicht *d*. Dabei ist die Gesamtdicke der vier bodenklimatischen Zonen in jedem Falle von dem Werte des jeweiligen geothermischen Gradienten des betreffenden Gebietes, sowie von der in entgegengesetzter Richtung wirkenden, auf der Oberfläche antreffenden Sonnenstrahlung abhängig. Grundsätzlich könnte man, auf Grund des Zusammenwirkens dieser beiden Faktoren, und in der Kenntnis der physikalischen Eigenschaften des Bodens und des Grundgesteins, die Mächtigkeit der klimatischen Sphäre des Bodens (des Grundgesteins) bestimmen.

Allein schon infolge der verschiedenen physikalischen Eigenschaften der Bodenarten und der Grundgesteine besitzt die Tiefe in welcher die Jahresschwankung der Bodentemperatur aufhört, sehr verschiedene Werte. Diese Unterschiede werden noch weiter verschärft infolge der modifizierenden Wirkungen der Expositionsverhältnisse, sowie infolge der Bodenbedeckung (mit Vegetation und mit Wasser).

Nach Untersuchungen, die im Jahre 1958 durchgeführt wurden (WAGNER 1965) konnte die Dicke der täglichen Inversionsschicht in einem Sodaboden, auf Grund von laufenden Beobachtungen, die über 46 Tage durchgeführt wurden, mit rund 22 cm festgestellt werden. Im gleichen Boden, aber mit einer Wasserbedeckung von 20 cm Dicke, beläuft sich dieser Wert auf 13 cm, wogegen in einem Sodaboden, der mit Wasser und Reispflanzen bedeckt war, gleichzeitig nur bis zu einer Tiefe von 7 cm die Inversionsschicht nachgewiesen werden konnte. Werden nun die bisher angeführten Multiplizierfaktoren verwendet, so erhält man folgende Werte:

	In Sodaböden	Unter einer 20 cm dicken Wasserschicht	Unter einem Reisbestand
Mächtigkeit der täglichen Inversionsschicht	22 cm	13 cm	7 cm
Untergrenze der täglichen Aktivitätsschicht	66 cm	40 cm	20 cm
Untergrenze der jährlichen Inversionsschicht	660 cm	400 cm	200 cm
Untergrenze der jährlichen Aktivitätsschicht	1300 cm	800 cm	400 cm

Es wäre unrichtig, die obigen Zahlenwerte als Absolutwerte aufzufassen, da die Messungen der Bodentemperatur in Sodaböden nur bis zu einer Tiefe von 30 cm sich erstrecken. Die für die Mächtigkeit der täglichen Inversionschichten angeführten Werte sind annähernd genau. Die Tiefe der täglichen Aktivitätsschicht wurde als die dreifache Tiefe der Schicht *a*, die Tiefe der Schicht *c* als das 30-fache der Tiefe der Schicht *a* und die der jährlichen Aktivitätsschicht als das 20-fache der Tiefe der Schicht *b* angenommen.

Die Unterschiede welche zwischen den drei verschiedenartig bedeckten Böden gefunden wurden, sind wahrscheinlich etwas übertrieben, doch sind dieselben dazu geeignet, die Aufmerksamkeit auf die Unterschiede zu lenken, welche zwischen den klimatischen Zonen der verschiedenen Substrate bestehen können.

Die hier erwähnten drei Messpunkte lagen nahe zu einander. Demzufolge muss vorausgesetzt werden, dass bei den in gleichen Tiefen bestehenden Temperaturunterschieden neben den vertikalen Wärmeströmen auch horizontale Wärmeströme auftreten. Handelt es sich hingegen um homogene Substrate von grosser Ausdehnung, so wird eine einheitliche, parallele Temperaturschichtung des Bodens ausgebildet.

Unter den Wasserschichten des Festlandes erfährt die vertikale Temperaturschichtung des Bodens eine Veränderung. Unter seichten Gewässern findet man alle vier Schichten, unter den Seen aber, bei welchen am Boden des Sees keine tägliche Temperaturschwankung mehr auftritt, sind die Schichten *a* und *b* auch nicht vorhanden.

Unter ausgedehnten Waldungen befindet sich die Untergrenze der jährlichen Aktivitätsschicht in geringerer Tiefe als unter einem offenen Gelände, somit rückt im Walde das Vorherrschen des geothermischen Gradienten näher zur Oberfläche.

Dabei soll durch die beiden angeführten Abbildungen (Abb. 7 und 8) belegt werden, dass innerhalb der Wälder die tägliche Aktivitätsschicht wesentlich dünner ist, als unter einer nahegelegenen Wiese. Wie ersichtlich, beträgt die Mächtigkeit der täglichen Aktivitätsschicht in einem Falle nahezu 20 cm, und im anderem Falle überschreitet dieselbe den Wert von 20 cm (bis zu dieser Tiefe stehen Messungen zur Verfügung), im Walde ist aber die Mächtigkeit nur 13—7 cm.

Infolge des ziemlich lockeren Beobachtungsnetzes der Bodenthermometerstationen und vielmehr noch infolge der geringen Zahl der stündlichen Beobachtungen, besteht keine Möglichkeit dafür, ein Bild über die Verschieden-

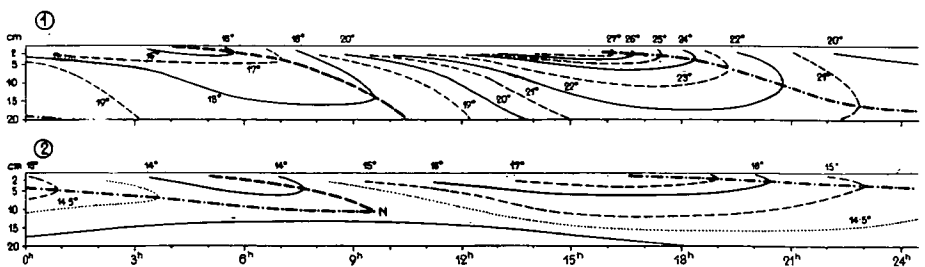


Abb. 7. *Isoplethen der Bodentemperatur*  
Bükk-Gebirge, Seehöhe 500 m. 1. An einer Wiese. 2. In jungem Buchenwald.



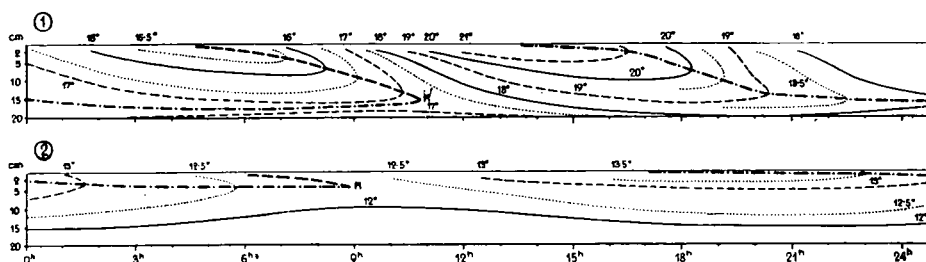


Abb. 8. *Isoplethen der Bodentemperatur*  
 Bükk—Gebirge, Seehöhe 700 m. 1. An einer Wiese. 2. In einem 50-jährigen  
 Nadelholzbestand.

heiten zu gewinnen, welche in den Merkmalen der täglichen Inversionsschicht und der täglichen Aktivitätsschicht in verschiedenen klimatischen Gebieten austreten. Besonders schwierig ist die Abgrenzung der Schichten *a* und *b* denn hierzu braucht man zumindest stündliche Beobachtungen. Würde es gelingen, Maximum-Minimum-Thermometer für Bodentemperaturmessungen zu konstruieren, aus deren Angaben könnte man sowohl die Untergrenze der Schicht *a* als auch die der Schicht *b* beststellen (s. Abb. 4), und man könnte sogar, mit Thermometern, welche in einer entsprechenden Tiefe untergebracht werden, die Lage des jährlichen neutralen Punktes sowie dasjenige Niveau bestimmen, in dem keine Jahresschwankung mehr vorhanden ist.

Die Intensivierung der Bodentemperaturbeobachtungen würde es ermöglichen, die geographische Anordnung der vertikalen Temperaturschichtung des Bodens aufzudecken, was gleichzeitig zu einer *Erkundung der vertikalen klimatischen Zonen des Bodens* führen würde.

## LITERATUR

- ANDERKÓ A.: A talaj melegének periódusos ingása. Matematikai és Fizikai Lapok, 18. Budapest 1909.
- BACSÓ N.—KAKAS J.—TAKÁCS L.: Magyarország éghajlata. Orsz. Meteorológiai Intézet hiv. kiadv., XVII. kötet Budapest 1953.
- GEIGER, R.: Das Klima der bodennahen Luftschicht. Ein Lehrbuch der Mikroklimatologie. — Braunschweig 1961.
- KUNKEL, G.: Meteorologisch-Mikroklimatische Beobachtungen in Valdivia (Südchile). Abhandlungen der deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. 1959.
- TAKÁCS, L.: A magyarországi talajok hőgazdálkodása. Az MTA Műszaki Tud. Osztályának Közleményei, X. kötet. Budapest 1953.
- WAGNER, R.: Adatok a Délkelet-Alföld mikroklimájához. Földrajzi Értesítő, V. 1956.
- WAGNER, R.: Die Temperatur des Bodens, des Wassers und der Luft in Kopáncs. I—II. Acta Climatologica, Tom. IV—V. und Tom. VI. Szeged 1965 und 1966.



## II.

### Ein mathematisches Modell für die thermische Schichtung des natürlichen Bodens

von L. TAKÁCS

**Summary:** (*A mathematical model of the thermal stratification of the natural soil*)

— For the purposes of a mathematical formulation of the fourfold thermal stratification of natural soils within the diurnal and annual variation of temperature ( $u$ ) according to the depth of the soil ( $z$ ) and the time ( $t$ ), a model  $F$  [ $uzt$ ] has been constructed, the approximate function of which — after a harmonic analyse of the observed data — by the first and second members can be represented with an exactitude sufficient for the most part of the theoretical and practical purposes. The first partial derivate according to  $z$  of that approximate function has been defined as a gradient. If the gradient is equal to zero, an inversion will take place in the soil. In the isopleth-representation the line  $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$

is called an inversion-line. The maximum depth of this line is determined by the marginal depth of the so-called diurnal (annual) inversion layers. Similarly the first partial derivate according to  $t$  has been defined as a thermal tendency. If this is equal to zero, a thermometrical extreme will take place in the upper layers of the soil. In the representation by isoplethes the line  $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$  is called an extreme-line. The maximum depth of this line

(until the diurnal or annual periodical phenomena penetrate into the soil) is identical with the marginal depth of the so-called diurnal (annual) active layer. By the aid of these, one may in the form of mathematical formulars obtain the mathematical conditions of the occurence of the thermal stratification of the soil.

**Zusammenfassung:** Für die mathematische Abfassung der vierfachen thermometrischen Schichtung von natürlichen Böden im Rahmen der periodischen täglichen bzw. jährlichen Temperaturbewegung ( $u$ ) nach der Bodentiefe ( $z$ ) und laufender Zeit ( $t$ ) wurde ein Modell  $F[uzt]$  konstruiert, dessen Näherungsfunktion nach den ersten zwei Gliedern der harmonischen Analyse von Beobachtungsangaben für die meisten praktischen und theoretischen Ansprüche mit genügender Pünktlichkeit dargestellt werden kann. Die erste partielle Ableitung nach  $z$  dieser Näherungsfunktion wurde als Gradient definiert. Wenn der Gradient Null ist, tritt eine Inversion im Boden auf. In der Isoplethendarstellung nennt man die Linie  $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$  eine Inversionslinie. Die maximale Tiefe der Inversions-

linie bestimmt die Grenztiefe der sog. täglichen (jährlichen) Inversionsschichten. Die erste partielle Ableitung nach  $t$  wurde als Tendenz definiert. Wenn diese gleich Null ist, tritt in den obersten Bodenschichten ein Extremwert auf. In der Isoplethendarstellung nennt man die Linie  $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$  eine Extremitätslinie. Die maximale Tiefe

der Extremitätslinie (bis die täglichen bzw. jährlichen periodischen Erscheinungen

in den Boden eindringen) bestimmt die Granztiefe der sog. täglichen (jährlichen) aktiven Schicht. Dadurch könnte man die mathematischen Bedingungen für das Auftreten der thermischen Schichtung des Bodens formelmässig angeben.

Mit der Veränderung und Fortpflanzung der Temperatur im Boden hat man sich seit langer Zeit sehr viel beschäftigt. Die Theorie der Temperatur- und Wärmebewegungen im Erdboden gründet sich auf die theoretischen Wärmelehren von Fourier (1822) und Poisson (1835).

Viele berühmte Forscher haben die Theorie mit den Erfahrungen verglichen. Aus der wirklich reichen Fachliteratur sei hier nur eine klassische Feststellung von R. Geiger (1961) wörtlich zitiert: „Aus all den starken Einwirkungen der wechselnden Witterung auf die Bodentemperaturen, wird man entnehmen können, dass die eleganten Jahres- und Tagesgänge der Bodentemperaturen, wie sie zur Bestätigung der ... (durch verschiedene Vereinfachungen der Anfangs- und Grenzbedingungen festgestellten) ... Gesetze in physikalischen und meteorologischen Lehrbüchern erscheinen, nur ein Rechenergebnis aus langen Beobachtungsreihen ... (wir können wieder hinzufügen: oder eine spezielle Auswahl der Daten an günstigsten Strahlungstagen) ... sind, die tunlichst in einem künstlich homogenisierten Boden gemacht sind. Wenn wir uns dieser Einschränkung bewusst sind, können wir solche ausgeglichene Reihen noch verwenden, um den Zusammenhang des Jahres- und Tagesganges der Temperatur mit der Jahreszeit und Bodentiefe aufzuzeigen.“

Der lebende „natürliche“ Boden — wie trivial bekannt — ist kein homogenes Medium: Die Temperaturleitzahl ist keine Konstante, die Temperaturwellen pflanzen sich nicht bis zu einer unendlichen Tiefe fort, sondern nur bis zu einem Schichtniveau. Der lebende Boden ist kein isotropes Medium: das logarithmische Dekrement der Amplituden ist äusserst selten gleich der Verzögerung der Phasenzeiten. Die Wärmebewegung geht nicht ausschliesslich unidimensionell vor sich. Im lebenden Boden können Wärmemengen erscheinen (z. B. durch chemische Prozesse, Düngerreste), oder sich in eine andere Form der Energie (z. B. durch latente Wärme der Vaporisation, der Solidifikation) umwandeln. Im voraus setzen wir keine solche beschränkende Vorbedingungen auf.

Im folgenden versuchen wir einen mathematischen Modell aufzustellen, dessen Gültigkeit (i. e. die Möglichkeit der Zumessung der Theorie zu den empirischen Daten) nicht nur unter idealisierten Umständen, sondern ganz allgemein gesichert scheint. Die strenge mathematische Auffassung der verwinkelten Probleme der Temperaturbewegung (also auch des Wärmeumsatzes im Boden) ist im Gebiete der einfachsten (elementaren, primitiven) Funktionen nicht möglich, — viel mehr im Gebiete des erweiterten Funktionsbegriffs. In unserem Modell möchten wir durch

$$F[a, b, c, \dots u, z, t]$$

eine zusammengesetzte Funktion bezeichnen, deren Argumente — im eckigen Klammer stehenden  $a, b, c, \dots$  — nicht nur sog. unabhängige-abhängige *Veränderlichen* ( $u, z, t$ ), sondern wieder *Funktionen*, (z. B.  $k(z, t)$  Funktion der Tiefe und der Zeit), numerische *Konstanten* (z. B.  $l(N, E, m)$  geographische Lage), bodenphysikalische (meistens veränderliche) *Koeffizienten* und solche meteorologische *Umgebungsparametern* sein können, die mit der Bodentemperatur nur in verschiedenen stark korrelierten stochastischen Verbindungen stehen. In unserem Modell  $F$  können wir also prinzipiell alle Faktoren (Elemente



des Modells, Argumente der zusammengesetzten Funktion) in einem *mathematischen Symbol zusammenfassen*, durch deren die für eine gewisse Bodentiefe ( $z_i$ ) und in einem gewissen Beobachtungszeitpunkt ( $t_i$ ) aufgezeichnete Bodentemperatur ( $u_i$ ) bedingt wird.

Solche Bedingungsfaktoren (ohne alle mögliche derselben aufzählen zu wollen) sind z. B.:

- die Bodenfeuchtigkeit, bzw. der Wassergehalt des Bodens, möglicherweise als „Näherungsfunktion“ der Tiefe und der Zeit:  $n(z, t)$ ;
- die Beschaffenheit des Bodens, die Bodenart mit genügender Unterteilung, z. B. lehmiger Sandboden, als ein nur sehr langsam veränderlicher Bedingungsfaktor:  $(a)$ ;
- die chemische Zusammensetzung des Bodens, insbesondere Humusgehalt ( $h$ ), Salzgehalt ( $s$ ), PH-Werte ( $p$ ), als verhältnismässig dauerhafte Konstanten;
- das physikalische Gefüge des Bodens, insbesondere Porosität ( $p$ ) Porenvolumen, Korngrößen, Art und Weise bzw. Tiefe der agrotechnischen Kultivation, ...
- die bodenphysikalischen Koeffizienten, insbesondere Dichte ( $r$ ), spezifische Wärme ( $c_s$ ), Wärmekapazität der Volumeneinheit ( $w$ ), Wasserkapazität, ...
- die Temperaturleitfähigkeit, bzw. Wärmeleitfähigkeit, die wieder Näherungsfunktionen sind:  $k(n, r, w, p, \dots)$ ;
- die Bodenbedeckung, die Vegetationsparameter des Bestandes, ...
- die verschiedene Strahlungsparameter, das Albedo, die Strahlungskomponenten, die energetische Mengen der Einstrahlung, effektiven Austrahlung, der Strahlungsbilanz, die Länge des Tageslichts, bzw. die Zeit des Sonnenaufganges und Unterganges, die Sonnenscheindauer, die Wolkenart und -Höhe, ... als solche Faktoren, die die Temperatur der obersten Bodenschichten meistens nur in einer stochastisch angebbaren Weise, aber sehr stark beeinflussen;
- die Lufttemperatur in bodennahen Luftschichten und in Beständen, und damit zusammenhängend die Parameter des Windes, der turbulenten Diffusion, des Wärmeaustausches gegen die Luft auch mitspielende Faktoren sind; solche sind auch
- die hydrometeorologischen Parameter, Niederschlag, Tau, Verdunstung, Evaporation, Evapotranspiration, ...
- und so weiter ...

Diese  $F[a, b, c, \dots u, z, t]$  mathematische Abfassung ist ganz allgemein, sie enthält keine Beschränkungen, keine Initial-, Anfangs- oder Grenzbedingungen. An der Seite der Erfahrung besteht eine Tatsache: eine empirisch festgestellte

$$u_i, z_i, t_i$$

Zahlendreiheit, die in den Beobachtungstagebüchern festgesetzt wurden, in denen auch die anderen, oben angeführten massgebenden Elemente durch gleichzeitige Messungen bzw. Beobachtungen womöglich zahlenmässig oder gut umgeschrieben zur Verfügung stehen.

Mit dem durch  $F$  aufgeschriebenen Symbol möchten wir an der Seite der Theorie andeuten und ausdrücken, dass eine gewisse Beziehung, Verbindung, Zusammenhang, Korrelation — mit einem Worte: eine gewisse *Kohärenz* — zwischen den  $a, b, c, \dots$  Elementen des Modells besteht, ohne die nähere mathematische Umschreibung von Inhalt und Form dieser Kohärenz endgültig angeben zu wollen. Trotzdem möchten wir dieses Modell  $F$  mit der Eigenschaften einer stetigen und differenzierbaren Funktion versehen, und

einige Begriffe bzw. mathematische Operationen einfach und unverändert aus der Funktionstheorie übernehmen.

Die Möglichkeit der Erweiterungen immer aufrechterhaltend beabsichtigen wir nach unserer nächsten Zielsetzung zum erstenmal mit einem Modell uns zu beschäftigen, welches nur drei Elemente:  $u$ ,  $z$ ,  $t$ , hat.

Lenken wir unsere Aufmerksamkeit einstweilen auf die Zahlendreiheiten. Für uns ist eine  $u$ ,  $z$ ,  $t$  Zahlendreiheit eine Gegebenheit. Bevor wir uns mit dieser Gegebenheit beschäftigen, ist es unbedingt notwendig die Andeutung der einzelnen Elemente, die Eigenheiten der Zahlendreiheit kurz zusammenzufassen, — auch in dem Falle, wenn ein Teil deren, was wir zu sagen haben, selbstverständlich oder ganz trivial erscheinen.

Das Definitionsbereich des Elementes  $u$  reicht von  $-273^{\circ}\text{C}$  ( $0^{\circ}\text{-Kelvin}$ ) bis zu beliebigen Graden, praktisch zwischen den meteorologischen Extremtemperaturen. Die Extreme haben keine bestimmten Grenzen, wie bekannt, können auch in der Meteorologie neue Rekorde erreicht werden. Der natürliche Nullpunkt der Skale ist der Taupunkt des Eises (es können positive und negative Beobachtungsangaben gleicherweise vorkommen), oder manchmal  $0^{\circ}\text{K}$ , oder kann auch eventuell ein anderer Ausgangspunkt vorgestellt werden, z. B. die Mitteltemperatur auf eine gewisse Schichtentiefe oder Zeitpunkt (mit + resp. — Angaben). Gegenstand der Beobachtung ist die von irgendeinem Thermometer abgelesene  $^{\circ}\text{C}$  Temperatur. Die Natur des Elementes ist kontinuierlich: im Falle einer Aenderung müssen zwischen zwei Werten sämtliche inzwischen liegenden Werte aufgenommen werden.

Das Definitionsbereich des Elementes  $z$  liegt vom Erdboden vertikal nach unten gerichtet, prinzipiell bis zur beliebigen Tiefe, praktisch in den obersten Bodenschichten von einigen dm, resp. m. Die exakte Feststellung des 0-Punktes der Skale verursacht manchmal Schwierigkeiten, z. B. bei mit Wurzeln stark durchnetzten Bodenoberfläche, oder im Falle von durch Deflation, resp. Aflation verursachten Aenderungen, bei Schneedecke oder bei unebener Oberfläche. Der Gegenstand der Beobachtung ist die Feststellung der Schichtentiefe.

Von der Meteorologischen Weltorganisation (WMO) werden für agrometeorologische Beobachtungen die folgenden Schichten empfohlen: 5, 10, 20, 50, 100 cm.

Die Beobachtungen werden im allgemeinen mit nahe *zueinander* und nicht streng vertikal *untereinander* angebrachten Thermometern vorgenommen, die erhaltenen Angaben werden jedoch (mit Annäherung) *unidimensional* interpretiert, ungeachtet der gar nicht unbedeutenden territorialen (zweidimensionalen) Streuung der Bodentemperaturen, welche in der gleichen Tiefe beobachtet werden kann. Infolge der geringen Ungewissheit der Einstellung der Messungsniveaus und der Ahomogenität des Bodens hat Z. VARGA H. (Die Streuung der Bodentemperatur, Időjárás 1960, S. 375) unter unbebauter Bodenoberfläche bei einem gebundenen Lehm Boden bei den Tiefen von 5 resp. 10 cm eine Streuung von  $0,8$  resp.  $0,3^{\circ}\text{C}$  innerhalb von  $1\text{ m}^2$  mit Quecksilberthermometer bei klarem Wetter, in fünfzehnmaliger Wiederholung festgestellt. Nach seinen Untersuchungen sollten innerhalb  $1\text{ m}^2$  in der Tiefe von 5 cm an 311 Punkten; und in der Tiefe von 10 cm an 35 Punkten gleichzeitige Messungen ausgeführt werden, um unter dieser unbebauten Bodenoberfläche von  $1\text{ m}^2$  die durchschnittliche Temperatur mit einer Genauigkeit von  $0,1^{\circ}$  feststellen zu können.

„Da die Teile der Erdoberfläche eigentlich als zweidimensionelle Grössen zu betrachten sind, bereitet deren genaue Temperaturbestimmung, die ja wegen der grundlegenden Bedeutung der Oberfläche als Sitz sowohl in der Wärmeeinnahme und der Wärmeabgabe als auch in der Reflexion der Strahlung und in der Verdunstungs- bzw. Kondensations-

fläche sehr wichtig, grosse Schwierigkeiten“ — wie KERÄNEN l. c. erwähnt. Diese grundlegende und messtechnische Schwierigkeiten haben wir so zu vermeiden versucht, dass wir aus der allernächsten Umgebung des Beobachtungsfeldes feine Erbodenteilchen gesammelt, und mit diesem Pulver durch eine Chloroformlösung des Kunststoffes PERS-PEX als Klebemittel das Thermometergefäss in einer Schichtdicke von etwa 1 mm umgeben haben, wobei das Gefäss zur Mitte auf der Erdoberfläche halb im Boden eingebettet liegt. Die Reflexionsfähigkeit der Oberfläche des so; «gefärbten» Thermometergefässes soll möglichst genau dieselbe sein wie die der in der nächsten Umgebung befindlichen unbewachsenen und natürlichen Fläichenstücken. Die Weiterleitung der Temperatur geschieht ebenso, wie von einer winzigen Scholle des natürlichen Bodens. Wir können dadurch für die Temperaturmessung eine Schichttiefe von weniger als 0,1 cm reproduzieren, deren Benennung einfachheitshalber „0 cm“ bleibt. Durch diese „Näherung“ müssen wir im täglichen Gange eine Verspätung der Phasenzeiten der Extreme von halb bis zu einer vollen Stunde mit in Kauf nehmen.

Das Definitionsbereich des Elementes  $t$  reicht vom Beginn der Beobachtungsreihe bis zum gegenwärtigen Augenblick. Ausser dem Intervall nach rückwärts können wir nur mit Rechnungen, nach vorne aber nur mit Prognose fortschreiten. Obwohl das Element, die laufende Zeit sich in eine Richtung ändert, wenn wir das Material der Untersuchung aus Archivangaben nehmen, können wir innerhalb des Intervalls von einem beliebigen Zeitpunkt  $t_0$  sowohl nach vorne, als nach rückwärts fortschreiten. In den Aufzeichnungen können wir sozusagen blättern. Das Element ist ihrer Natur nach *kontinuierlich*. Die Kurven der Linien-registrierungen wären tatsächlich kontinuierlich, aber die Punktopographen liefern bereits nur eine Reihe von diskreten Punkten.

Was uns zur Verfügung steht, ist meistens nur eine diskrete Angabe: die Ablebung eines bestimmten Stundenwertes auf einen gewissen Kalendertag (oder Monat, Jahr) oder auf andere Zeitdauer (Pentade, Dekade, Tageszeit, Jahreszeit, Dezennium, usw.) bezügli cher Mittelwert der Temperatur. Die natürliche Periodizität des Elementes ist der Tag und das Jahr im Zusammenhange mit dem scheinbaren Gang der Sonne. Der Gegenstand der Beobachtung des Elementes ist: Aufzeichnung des Datums, Jahr, Monat, Tag, Stunde, Minute. Der Nullpunkt der Skale ist beliebig zu wählen, die Einheit ebenfalls.

Um die Eigenschaften und Gesetzmässigkeiten der thermischen Schichtung des natürlichen Erdbodens näher feststellen zu können untersuchen wir gleichzeitig die mathematisch festsetzbaren Eigenschaften unseres Modells, und die Angaben der Beobachtungstabellen selbst.

Es stehen uns zwei Grundtabellen zur Verfügung. Die Tabelle I.1 und I.2 enthält die stündliche Bodentemperaturbeobachtungen, die an der Forschungsstelle Szarvas vom Mittag 10. 6. 1964. bis Mittag 13. 6. 1964. in den Tiefen 0, 1, 2, 5, 10, 20, 30, 50 cm (ergänzend mit den täglich dreimaligen Klimaterminablesungen in den Tiefen von 100 bzw. 150 cm) durchgeführt worden sind.

Beide zweidimensionelle Tabellen haben gleiches Gefüge. Die Zeilen sind nach der fixen Zeit  $t_i$  (volle Stunden nach mittlerer Ortszeit,) die Spalten nach den oben angeführten fixen Tiefen  $z_i$  benannt. Die  $u_i$  Tafelwerte sind bis Zehntelgrade beobachtet und aufgeschrieben.

Nach der oben angeführten Beschreibung von Eigenschaften und von Andeutungsintervallen dieser in den Tabellen koordinierten  $u_i$ ,  $z_i$ ,  $t_i$  Elemente des Modells gibt es keinen mathematischen Unterschied zwischen den Elementen selbst, deswegen kann man diese Elemente als *räumliche Koordinaten* in einem dreidimensionalen Descartes'schen Koordinatensystem auffassen und

Tabelle I. 1.

Stündliche Beobachtungsdaten der Bodentemperatur unter nackten Oberfläche an heiteren Sommertagen Szarvas Juni 1964. Bodenart: karbonatreicher, humusreicher Wiesenboden

Tag	Stde	0	1	2	5	10	20	30	50	100	150
10. VI.	13	40,7	31,7	29,3	25,8	22,9	20,7	20,4	20,2		
	14	38,8	32,5	30,5	27,3	24,3	21,0	20,5	20,1	17,0	14,0
	15	39,1	32,7	30,6	27,9	25,1	21,3	20,5	20,0		
	16	36,6	31,7	30,1	28,0	25,6	21,6	20,6	20,0		
	17	31,2	29,6	28,9	27,6	26,0	22,1	20,8	20,0		
	18	27,6	26,8	27,1	26,7	25,7	22,8	21,0	19,9		
	19	22,5	23,8	25,0	25,4	25,2	22,8	21,0	19,9		
	20	19,7	21,7	23,2	24,1	24,5	22,8	21,1	19,9		
	21	18,0	20,2	21,8	22,9	23,7	22,8	21,2	19,9	17,1	14,1
	22	17,0	19,4	20,8	22,1	22,7	22,8	21,2	19,9		
	23	16,0	18,2	19,8	21,2	22,4	22,7	21,3	19,9		
	24	15,5	17,6	19,2	20,6	21,8	22,5	21,3	19,9		
11. VI.	01	15,5	17,4	18,8	20,2	21,3	22,3	21,3	19,9		
	02	15,5	17,2	18,5	19,8	20,9	22,1	21,3	19,9		
	03	15,4	17,0	18,2	19,4	20,5	21,9	21,3	19,9		
	04	15,4	16,9	17,9	19,0	20,1	21,7	21,3	19,9		
	05	15,3	16,7	17,6	18,6	19,9	21,5	21,2	19,9		
	06	17,7	17,6	17,9	18,5	19,6	21,3	21,1	19,9		
	07	24,5	21,2	19,6	19,1	19,6	21,2	21,1	19,9	17,1	14,1
	08	31,8	25,7	22,2	20,5	20,0	21,1	21,1	19,9		
	09	36,6	29,1	24,7	22,1	20,8	21,0	21,0	19,9		
	10	40,5	32,5	27,8	24,4	22,0	21,0	21,0	19,9		
	11	45,6	35,5	30,5	26,5	23,4	21,1	20,9	19,9		
	12	49,0	37,4	33,0	28,5	24,8	21,4	20,9	19,9		
	13	50,9	38,7	35,0	30,4	26,4	21,8	21,0	19,8		
	14	50,0	40,0	35,8	31,6	27,6	22,4	21,0	19,8	17,2	14,2
	15	48,5	40,2	36,0	32,3	28,6	22,8	21,2	19,8		
	16	46,0	39,2	35,8	32,5	28,6	23,4	21,3	19,8		
	17	37,5	35,2	34,2	32,0	29,5	23,8	21,5	19,8		
	18	35,5	33,4	32,2	30,9	29,4	24,3	21,7	19,8		
	19	29,5	29,8	30,2	29,8	29,4	24,6	21,8	19,8		
	20	25,5	27,2	28,4	28,6	28,3	24,8	22,0	19,8		
	21	23,0	25,2	26,6	27,3	27,6	24,9	22,2	19,8	17,2	14,3
	22	22,5	24,4	25,6	26,4	26,9	25,0	22,3	19,9		
	23	20,6	23,1	24,6	25,4	26,2	24,9	22,5	19,9		
	24	20,0	22,0	23,8	24,8	25,6	24,8	22,5	20,0		



Tabelle I. 2.

Stündliche Beobachtungsdaten der Bodentemperatur unter nackten Oberfläche an heiteren Sommertagen Szarvas Juni 1964. Bodenart: karbonatreicher humusreicher Wiesenboden

Tag	Stde	0	1	2	5	10	20	30	50	100	150
12. VI.	01	19,2	21,5	23,1	24,1	24,9	24,6	22,6	20,0		
	02	18,4	20,8	22,4	23,4	24,2	24,4	22,6	20,0		
	03	17,7	20,0	21,6	22,8	23,5	24,2	22,7	20,1		
	04	17,0	19,2	20,8	22,2	22,8	24,1	22,7	20,1		
	05	18,5	19,8	20,8	21,8	22,8	23,8	22,6	20,2		
	06	24,0	22,5	21,5	21,8	22,7	23,6	22,7	20,2		
	07	31,3	26,7	23,6	22,6	22,7	23,5	22,7	20,3	17,2	14,3
	08	36,0	29,6	25,9	24,0	23,2	23,3	22,6	20,3		
	09	41,3	32,7	28,0	25,4	23,8	23,3	22,6	20,3		
	10	47,4	37,4	31,2	27,5	25,0	23,3	22,6	20,3		
	11	50,7	39,7	33,6	29,4	26,2	23,4	22,5	20,3		
	12	47,0	39,0	35,4	31,4	26,5	23,6	22,5	20,3		
	13	53,0	40,6	36,0	31,5	28,5	24,0	22,5	20,3		
	14	49,0	40,0	36,2	32,5	29,2	24,4	22,6	20,3	17,3	14,4
	15	49,0	41,0	37,0	33,2	30,0	24,8	22,7	20,4		
	16	45,5	39,6	36,6	32,8	30,6	25,2	22,8	20,4		
	17	40,0	36,6	35,0	32,0	30,7	25,5	23,0	20,4		
	18	36,0	34,2	33,2	31,4	30,6	25,8	23,2	20,4		
	19	28,5	28,9	30,6	30,2	30,0	26,2	23,3	20,4		
	20	25,0	27,3	28,8	29,1	29,2	26,3	23,4	20,4		
	21	23,0	25,6	27,4	28,2	28,6	26,3	23,6	20,4	17,3	14,4
	22	21,5	24,4	26,2	27,2	28,0	26,3	23,7	20,5		
	23	20,0	23,2	25,0	26,3	26,3	26,3	23,7	20,5		
	24	19,0	22,0	24,0	25,3	26,1	26,1	23,8	20,5		
13. VI.	01	18,5	21,3	23,3	24,6	25,6	25,8	23,8	20,6		
	02	18,0	20,6	22,6	23,9	25,1	25,6	23,8	20,6		
	03	17,5	20,0	21,8	23,2	24,6	25,4	23,8	20,7		
	04	17,0	19,4	21,0	22,4	24,0	25,2	23,8	20,7		
	05	18,5	20,0	21,0	22,4	23,7	25,0	24,0	20,7		
	06	22,5	21,6	21,6	22,2	23,4	24,7	23,8	20,8		
	07	30,5	26,2	23,8	23,0	23,4	24,5	23,8	20,9	17,3	14,5
	08	37,5	30,8	26,4	24,4	23,8	24,3	23,6	20,9		
	09	44,5	35,2	29,6	26,2	24,5	24,2	23,6	20,9		
	10	47,5	37,8	31,8	27,9	25,5	24,2	23,5	20,9		
	11	50,0	39,8	34,2	30,0	26,8	24,4	23,5	20,9		
	12	49,5	39,4	35,6	31,2	28,0	24,5	23,4	21,0		

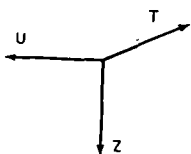


Abbildung 1.  
Darstellung der  
Richtung der  
Achsen des drei-  
elementigen Mo-  
dells.

durch räumliche Punkte veranschaulichen. Aus zweckmäßigen Gründen wählen wir die Richtung der positiven Koordinatenachsen des Systems  $U\ Z\ T$  für die Veranschaulichung gemäss der Abbildung 1.

In der Meteorologie und Klimatologie gibt es für die meisten sog. klimatologischen Elemente ein allgemein angenommenes Grundprinzip, nämlich das *Prinzip der Stetigkeit*. (Wir haben oben schon gezeigt, dass alle drei Elemente unseres Modelles *stetig* sind). Aus diesem Grundprinzip folgt unmittelbar das *Prinzip der Interpolationsfähigkeit*, d. h.: wir sind vollberechtigt als *wahrscheinlichste Näherung* zwischen zwei  $t_1$  und  $t_2$  Beobachtungsterminen für einen Zeitpunkt  $t_m$  ( $t_1 < t_m < t_2$ ) und/oder zwischen zwei  $z_1$  und  $z_2$  Bodentiefe für eine Zwischentiefe  $z_n$  ( $z_1 < z_n < z_2$ ) je einen Wert ( $u_m$  bzw.  $u_n$ ) für die Temperatur *interpolieren*. Das Resultat der Interpolation ist ein *Näherungswert*, den man mathematisch ausrechnen, oder graphisch angeben kann.

Die Art der mathematischen Interpolation kann nach zwei Punkten eine *lineare*, nach drei nacheinanderfolgenden Punkten eine *parabolische*, nach mehreren Punkten eine sog. *sinusische* sein. Das letztere Verfahren ist als *harmonische Näherung*, als Reihenentwicklung nach Fourier'schen Koeffizienten bekannt. Die graphische Interpolation geschieht durch anpassende Kurvenführung unter den angegebenen Punkten.

Aus diesen Prinzipien (Stetigkeit, Interpolierbarkeit) folgt, dass wir durch den angegebenen  $u_i, z_i, t_i$  Punkten eine *räumliche (dreidimensionelle) Näherungsfläche legen* können. Abbildung 2 veranschaulicht eine solche, aus der Tabelle I.1 durch graphische Interpolation hergestellte Näherungsfläche. Die oben krumme Fläche geht in den grösseren Tiefen in eine fast ebene Fläche über.

Das Bild unseres Modells  $F[u, z, t]$  von drei Elementen ist also eine dreidimensionelle Näherungsfläche.

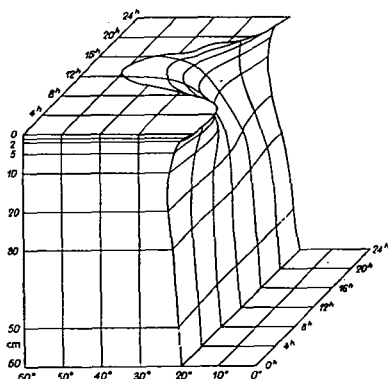


Abbildung 2. Darstellung des  
Temperaturganges in einem UZT  
dreidimensionalen Koordinaten-  
system. Szarvas, 11. Juni  
1964., 00 — 24 Uhr, 0,1 — 60 cm.

Nach einer mathematischen Verallgemeinerung entspricht für ein Modell aus 4, 5, ...  $n$  Elemente eine 4, 5, ...  $n$  dimensionelle Näherungsfläche, wenn für das vierte, fünfte, ...  $n$ -te Element die Prinzipien der Stetigkeit und Interpolierbarkeit anwendbar sind. Es ist immer von vornherein nach der Untersuchung der Natur und Definitionsbereich, Gültigkeitsbereich eines neuen Elements zu erklären, ob die Grundprinzipien gültig sind.

Wir müssen betonen, dass die fehlenden  $u_m$  bzw.  $u_n$  Beobachtungen für die  $t_m$  Zwischenstermine und in den  $z_n$  Zwischentiepen völlig ebenbürtig durch Interpolationen nicht ersetzbar sind. Der Vergleich des Modells mit der vollen Wahrheit, mit der physikalischmeteorologischen Realität kann immer nur durch Interpolationen, durch Näherung mit einer gewissen *Wahrscheinlichkeit*,

Tabelle II.

Die harmonische Koeffizienten der Bodentemperatur  
Szarvas 00—24<sup>h</sup>. 11. VI. 1964.

z	cm	0	1	2	5	10	20	30
A <sub>0z</sub>	C°	30,52	27,62	26,46	25,37	24,47	22,71	21,45
A <sub>1z</sub>		17,40	11,19	8,98	6,95	5,12	2,02	0,60
A <sub>2z</sub>		3,69	1,84	1,36	0,72	0,50	0,37	0,24
A <sub>3z</sub>		0,90	0,65	0,28	0,31	0,35	0,27	0,14
A <sub>4z</sub>		0,44	0,56	0,40	0,36	0,32	0,27	0,11
A <sub>5z</sub>		0,70	0,41	0,35	0,29	0,34	0,19	0,11
B <sub>1z</sub>	°	245	232	218	203	184	150	122
B <sub>2z</sub>		80	76	65	55	269	188	168
B <sub>3z</sub>		93	87	136	15	182	153	146
B <sub>4z</sub>		267	216	173	164	136	149	158
B <sub>5z</sub>		188	157	158	144	137	144	146

mit einer gewissen Zuverlässigkeit geschehen, die *die meisten praktischen und wissenschaftlichen Anüchte sonssrt befriedigen können*. Eben deswegen ist es in unserem Modell F zwischen den funktionellen und den stochastischen Kohärenzen der Elemente kein grundsätzlicher, mathematischer, formaler Unterschied. Jede Näherung ist zwangsläufig immer mit einer Wahrscheinlichkeit und jede Messung mit einer gewissen Streuung der Messangaben verbunden. Daher haben wir alle, sonst logische stochastische Kohärenzen in unser Modell F eingenommen. Aber sei die Korrelation noch so gross, folgt aus dieser Kohärenz keineswegs eine funktionelle Verbindung im Sinne der reinen Mathematik, höchstens eine mehr oder weniger strenge Kohärenz im Sinne der statistischen Methoden anwendenden, mit streuenden Beobachtungs- oder Messungsdaten arbeitenden Naturwissenschaften. Wir haben im Gebiete der Untersuchungen immer mit einem Modell F zu tun, besonders dann, wenn in der Erzeugung einer Erscheinung mehrere Ursachen zusammenspielen können.

Die positive Richtung der Achsen des zur Veranschaulichung der Näherungsfläche verwendeten Koordinatensystems U Z T haben wir deshalb in der auf der Skizze der Abbildung 1 angebrachten Weise gewählt, damit die auf die Achsen U Z T senkrechte Flächenschnitte mit der üblichen eingeführten Veranschaulichung in einer Koordinaten-Ebene sich in Übereinstimmung befinden.

Wenn der Schnitt auf die Achse Z vom Anfangspunkt in einer gewissen Entfernung  $z_i = \text{Konstante}$  senkrecht ist, wird dies am mathematischen Modell folgenderweise bezeichnet: F [ $z_i$ (tu)]. Dieser Schnitt ist identisch mit der Abbildung, wo die laufende Zeit (als Abszisse) an der horizontalen Achse, die Temperatur aber (als Ordinate) an der vertikalen Achse veranschaulicht wird. Wenn man die Gestaltung der Bodentemperatur in mehreren verschiedenen Tiefen in einem Bilde darstellen will, müssen die einzelnen Glieder der Kurvenschar mit einer entsprechenden Zeichnungstechnik, mit der „Notierung“ der

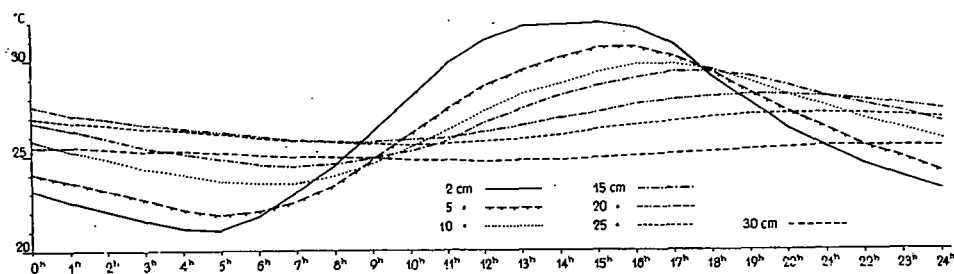


Abbildung 3. Tagesgang der Bodentemperatur im Sodaboden von Kópáncs. Auf Grund von 46-tägigen Mitteln, vom 11. Juli bis 25. August 1958. Modell  $F[z_i(tu)]$

Kurven unterschieden werden. So stellt z. B. die Abbildung 3. (Wagner, 1965.) den durchschnittlichen Tagesgang der Bodentemperatur in sieben verschiedenen Tiefen dar. Nach der Verbindung der die 46-täglichen Durchschnittswerte der in viertelstündigen Zeitabschnitten ausgeführten Beobachtungen darstellenden Punkte mit Hilfe von geraden Linienabschnitten — (also eigentlich eine lineare Interpolation nach  $t$  anwendend) — erhalten wir eine fast flachlaufende Kurvenschar, deren einzelne Mitglieder eindeutig voneinander unterschieden werden können. An den gegen die tieferen Schichten immer abnehmende Amplitudos zeigende Kurven kommt die tägliche Periodizität der Bodentemperatur gut zu Tage. Die Isolinien schneiden sich im flachen Winkel, sie „oskulieren“.

Die Kurven steigen oder senken sich in der laufenden Zeit je nachdem die zur Zeit  $t + \Delta t$  gehörende Temperatur den Wert  $u + \Delta u$  (höher als der vorangehende), oder  $u - \Delta u$  (niedriger als der vorangehende) annimmt. Die Kurven können aber mit der Achse  $U$  nie parallel sein, denn das würde bedeuten, dass zur selben Tiefe *gleichzeitig* auch mehrere Temperaturwerte gehören könnten, mit anderen Worten: dass wir keine Temperatur messen könnten.

Eine solche mit einer fortlaufenden Linie dargestellte Kurve ist eigentlich die Darstellung einer — vorläufig noch nicht näher bestimmten — expliziten Funktion.  $u = f(t)$ . Mit der oben bereits untersuchten berechtigten Annahme der Kontinuirlichkeit und der Interpolierbarkeit kann diese Funktion nach  $t$  differenziert und integriert werden. Der durch

$$\frac{du}{dt} \quad \text{oder} \quad \frac{df(t)}{dt} \quad \text{oder (im Zeitpunkte } t = a \text{) durch} \quad \left( \frac{df(t)}{dt} \right)_{t=a} \quad \text{bezeichnete,}$$

Begriff des Derivierten hat, wie aus der Funktionslehre bekannt, eine einfache geometrische Bedeutung: sie ist die Richtungstangente der Berührungsgerade der Kurve  $u = f(t)$  im Punkte  $a$ . Wenn die Kurve steigt, so ist die Derivierte, mithin auch die Richtungstangente positiv: d. h. die positive Richtung der Achse  $+T$  kann mit positiver Umdrehung bei einem Winkel  $< 90^\circ$  in eine mit der Tangente parallele Richtung übertragen werden. Wenn die Kurve abnimmt ist die Derivierte und die Richtungstangente negativ: die Richtung der Achse  $+T$  schliesst mit der Tangente im Punkte „a“ einen grösseren Winkel als  $90^\circ$  ein. Alle diese Begriffe, Bezeichnungen und Eigenschaften der Funktionslehre werden auf das Modell  $F$  übertragen, mit Hinsicht aber auf

die anderen Elemente des Modells verwenden wir hier das Zeichen der partiellen Differenzierung.

Es wird ferner ein neuer, aber unseres Erachtens leicht interpretierbarer Begriff eingeführt: *unter Tendenz verstehen wir den ersten partiellen Differenzialquotient nach  $t$  des Modells  $F$ , und bezeichnen sie:*

$$\tau = \frac{\delta F}{\delta t}$$

Bei einer positiven Tendenz der  $\tau$  steigt die Kurve  $F[z_i(t)u,]$  bei einer negativen Tendenz der  $\tau$  sinkt die vorige Kurve, und wenn die Tendenz gleich 0 ist, so hat die Temperaturkurve im Zeitpunkt  $t_M$ , resp.  $t_m$  eine extreme Lage, und zwar:

ein Maximum, wenn die Kurve vom Ansteigen ins Sinken umschaltet,

ein Minimum, wenn die Kurve vom Sinken ins Steigen umschaltet.

Es kann ohne aller logischen Schwierigkeit angenommen werden, dass  $F$  nicht nur differenzierbar nach  $t$ , sondern auch integrierbar ist. Der Sinn des Integrals von  $t_1$  bis  $t_2$  ist: der Mittelwert der Temperatur zwischen einem früheren Zeitpunkt  $t_1$  und einem späteren  $t_2$

$$\int_{t_1}^{t_2} F dt = \bar{u}_{t_2-t_1}$$

Sein geometrischer Sinn ist derselbe, wie jener des bestimmten Integrals: die Höhe der durchschnittlichen Ordinate, oder: die Grösse der Fläche unter der Kurve auf dem Abschnitte  $t_2-t_1$ , unter der Zeitraum von  $t_1$  bis  $t_2$  (Stunde, Tag, Pentade, Monat, Jahr usw.).

Wenn der Schnitt auf die Achse  $T$  — in einer Entfernung  $t_i = \text{Konstante}$  — senkrecht ist, so ist die Bezeichnung unseres Modells:  $F[t_i(uz)]$ , und so erhalten wir die Temperatur  $u$  als Abszisse (links!) und die Bodentiefe  $z$  als Ordinate (nach unten!) abbildend die sogenannten Tautochronen. Unsere Abbildung 4. zeigt einige solche Tautochronen aus den in Szarvas ausgeführten Beobachtungen: die Tautochronen von 19, 20, 21, 22, 23 und 24 Uhr am 11. Juni 1964, sowie die Tautochronen von 04, 06, 07 und 08 Uhr am 12. Juni 1964, jedoch um die bessere Übersichtlichkeit wurde nur die Isolinie von 21 Uhr in ihrer ganzen Länge eingezeichnet. Die beobachteten Angaben

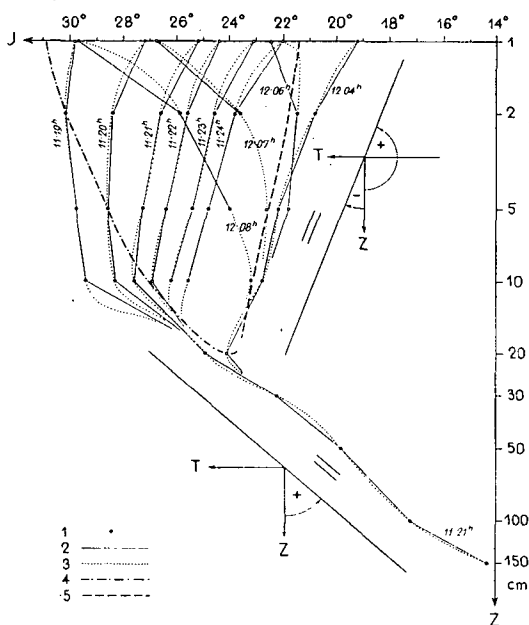


Abbildung 4. Tautochronen der Bodentemperatur, Szarvas, am 11. Juni 1964., um 19, 20, 21, 22, 23, 24, Uhr, bzw. am 12. Juni 1964 um 04, 06, 07, 08 Uhr MOZ. Modell  $F[t_i(uz)]$

— lineare Interpolation  
 ..... graphische Interpolation  
 ..... Divergenzlinie  
 ..... Konvergenzlinie  
 \* \* \* beobachtete Werte.



wurden mit schrägen (x) bezeichnet, diese mit geraden Linienabschnitten und anpassender Linienführung (mit punktierter Linie ..... bezeichneter graphischer Interpolation) zusammengebunden, um die zwischen den zwei Näherungen eventuell entstehenden Differenzen zu veranschaulichen. An der Ordinate wurde zur Hervorhebung der stärkeren Aenderungen der oberflächennahen Schichten logarithmischer Masstab angewendet. Die nach T skalierten Isokurven können sich auch mehrfach schneiden, in diesem Falle entsteht ein Tautochronnetz.

Wie ersichtlich sind in den oberflächennahen Schichten zwischen der graphischen Interpolation (Punktreihe) und der linearen Interpolation im logarithmischen Massstabes (die kontinuierlichen geraden Linienabschnitte) auch 1 Grad erreichende Abweichungen vorkommen. Die anpassende Linienführung die graphische Interpolation ist nämlich nicht frei von der individuellen Beurteilung des Zeichners, von dem sogenannten *persönlichen Effekt*.

Die Neigungsrichtung der Isokurven ist verschieden. In den Abschnitten, wo die Temperatur mit der zunehmenden Tiefe abnimmt, kann die Achse Z unter einer *positiven* Richtung (entgegengesetzt mit der Drehrichtung der Uhr) mit einem von 90° kleineren Winkel in die Richtung der Tangente des Tautochronabschnittes — (z. B. die Isolinie von 21 Uhr von der Tiefe von 10 cm bis 150 cm) — gedreht werden und umgekehrt: wo die Temperatur mit der zunehmenden Tiefe steigt, (z. B. die Linie von 04 Uhr 1—20 cm) ist die Richtung der Drehung von kleiner als 90° *negativ*. Selbstverständlich kann dieselbe Richtung auch mit einer positiven Drehung erreicht werden, dann ist aber der Winkel der Drehung grösser als der rechte Winkel, wie dies bereits an der Abbildung angedeutet wurde.

Jene Tautochronpunkte, bei welchen die Tangente der Anpassungskurven mit der Achse Z parallel wird (in anderen Worten: wo der mit der Achse Z eingeschlossener Winkel 0° oder 180° ist) haben wir an der Abbildung 4 mit strichpunktierter Linie —.—.—, resp. gestrichelter Linie — — — verbunden, wobei das Prinzip der Stetigkeit auf zwischen je zwei vollständigen Tautochronen vorstellbaren Linien erweitert wurde. Im ersten Falle übergeht die Temperatur an der Tautochronlinie in die Richtung der Tiefe fortschreitend vom Ansteigen ins Abnehmen, im zweiten Falle aber vom Abnehmen ins Ansteigen. Entlang der strichpunktierter Linie .—.—.— liegen die im ersten Teile unserer Arbeit bereits behandelten sogenannten *Warmpunkte* — deren Gesamtheit die sogenannte *Divergenzlinie* bildet; dagegen entlang der gestrichelten Linie — — — — — liegen die sog. *Kaltpunkte*, welche insgesamt die sog. *Konvergenzlinie* ergeben. Auf die mathematische Behandlung derselben kommen wir noch im weiteren zurück, lenken jedoch bereits hier die Aufmerksamkeit auf sie, da sie nicht nur an den Isoplethen, sondern auch in der Darstellung F [t<sub>i</sub> (uz)] feststellbar sind.

Ebenso wie die Differenzierbarkeit nach t von der (an der Bildfläche TU erscheinenden) Funktion  $u = f(t)$  auf das Modell F übertragen wurde, übertragen wir mit einer definitionsartigen Begriffsübernahme die Differenzierbarkeit nach z (welche jetzt als je eine Tautochronegleichung erachtet werden kann) auf die implizite Gestalt des Modells F:

als Gradient bezeichnen wir die erste partielle Derivierte des Modells F nach z multipliziert mit -1 in der folgenden Weise

$$\gamma = - \frac{\partial F}{\partial z}$$

Der Begriff der Gradienten ist aus der Aerologie, Mikrometeorologie, usw. nicht unbekannt, eine neue Definition derselben erachten wir aber als angebracht, nicht nur wegen ihrer Anwendung auf das Modell F, sondern auch deshalb, weil die Benützung des negativen Vorzeichens nicht an allen Gebieten einheitlich vorgenommen wird.

Laut unserer Definition ist also der Bodentemperatur-gradient positiv, wenn die Temperatur des Bodens nach unten, gegen die tieferen Schichten fortschreitend abnimmt, im entgegengesetzten Falle ist sie negativ. Wo (und wann) eine Vorzeichenänderung vor sich geht, dort (und dann) ist

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

das ist also der Fall an den oben erwähnten Warm- und Kaltpunkten.

Wie es auch aus einigen Tautochronen der Abbildung 4 ersichtlich ist, haben nicht alle Tautochronen innerhalb der Bildfläche einen Extremwert, dagegen können aber bei einigen sogar mehrere Inversionen beobachtet werden. Die Tautochronen können nach rechts oder nach links neigen, mit der Achse U können sie aber nicht parallel laufen, und zwar aus den selben Gründen, die oben besprochen wurden.

Wenn der Schnitt der Oberfläche der Abbildung 2 auf die Achse U in der Entfernung  $u_i = \text{Konstante}$  senkrecht ist, — die Bezeichnungsart unseres Modells ist jetzt  $F[u_i(zt)]$  — dann erhalten wir die sogenannte *isoplethische* Darstellungsweise. Hier wurde die Bodentiefe  $z$  als die Abszisse und die Zeit  $t$  als Ordinate gezeichnet (aber, mit Beibehaltung der üblichen Darstellungsweise, ist die positive Richtung der Achse Z nach unten und die Achse T nach rechts gerichtet). Im Feld Z T erscheint eine die Orte gleicher Temperatur verbindende Kurvenschar, wenn alle Linien an derselben Zeichnung dargestellt werden sollen. In der ersten Hälfte der vorliegenden Arbeit können mehrere anschauliche Beispiele dieser Darstellungsweise vorgefunden werden, jedoch bringen wir in der Abbildung 5 die Bodenisothermen der an zwei nacheinander folgenden klaren Tagen durchgeführten Beobachtungen auf Grund des Datenmaterials der Tabellen 1.1 und 1.2, wobei auf das

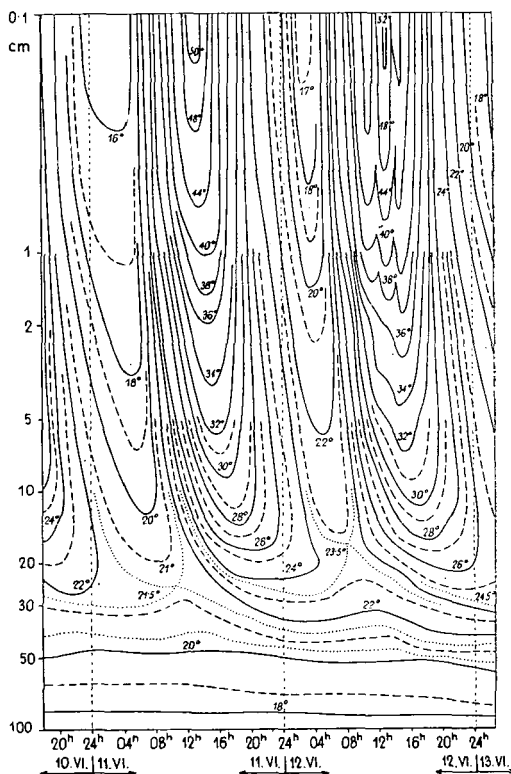


Abbildung 5. Tagesgang der Bodentemperatur in Isoplethen-Darstellung an zwei heiteren Tagen. Von 0,1 bis 100 cm. Szarvas, 11.—12. Juni 1964.

Koordinatenfeld  $ZT$  ein von dem bisherigen abweichender Massstab angewendet wird.

Die Isolinien  $u_i$  *schneiden sich nirgends*, sie werden höchstens zusammengedrängt infolge des engen Massstabes der Zeichnung. Die Isokurven der gradzahligen  $^{\circ}\text{C}$  werden mit einer ausgezogenen Linie, jene der ungeraden mit gestrichelter Linie, und die der halbgradigen mit einer Punktreihe an der Stelle des Koordinatenfeldes angegeben, wo dies infolge der Zusammengedrängtheit möglich war. Die Zeichnung selbst wurde so verfertigt, dass wir die Tafelwerte  $u_i$  der Tabellen 1.1 einesteils nach der Tiefe  $z$ , anderenteils nach der Zeit  $t$  linear interpoliert die Werte  $z_i$  resp.  $t_i$  auf runde Temperaturwerte errechnet und die erhaltenen Koordinaten  $z$   $t$  in Form von Punkte am Feld  $ZT$  aufgetragen haben. Diese wurden dann mit der möglichst geringsten Willkür jedoch mit glattlaufender Linienführung zusammengebunden und derart die lineare und graphische Interpolation (sachte: Extrapolation) kombiniert angewendet. Die Einteilung der Achse  $T$  ist ziemlich eng, aber gleichlaufend, jene der Achse  $Z$  ist logarithmisch: von 0,1 cm bis 1 cm ist die Tiefenskala dieselbe wie von 1 cm bis 10 cm, resp. von 10 cm bis 100 cm. Auf dieser Weise wurde einerseits eine noch gute Anschaulichkeit der grösseren Aenderungen der oberflächennahen Schichten angestrebt, andererseits wurde es dadurch vermieden, das Mass der Zeichnung mit der schwächeren Aenderungen der tieferen Schichten übermässig anwachsen zu lassen.

Die Bezeichnungsart unseres Modells ist ein bequemer mathematischer Ausdruck um festzustellen, um welcher (aus der drei möglichen Darstellungsweisen) Veranschaulichung der drei Daten  $u$   $z$   $t$  im zweidimensionalen Flächenkoordinatensystem von Descartes es sich handelt:

$F[z_i(tu)]$  ergibt die oskulierende Kurvenschar (Abb. 3),

$F[t_i(uz)]$  ergibt die Tautochronen, das Tautochronnetz (Abb. 4)

$F[u_i(zt)]$  ergibt die Kurvenschar der Isothermen, die Isoplethe (Abb. 5): ja gibt das Nacheinander der Elemente auch die Antwort auf die Frage, welches Element die erste (Abszisse  $X$ ) und welche die zweite Descartes'sche Ebene Koordinate ist.

Einen jeden der Ausdrücke  $F[z(tu)]$ ,  $F[t(uz)]$ , resp.  $F[u(zt)]$  nennen wir die explizite Gestalt des Modells, dagegen die Ausdrücke  $F[uzt] \equiv F[ztu] \equiv F[tuz]$  werden als die implizite Form des Modells benannt.

Um die Feststellung von GEIGER zu gebrauchen (S. Seite 59 des oben zitierten Werkes): „Jede der drei Darstellungsweisen hat ihre besonderen Vorzüge“, jedoch ist jede nur ein mehr oder weniger treues „Bild“, eine Annäherung an die Wirklichkeit, mit der Annahme der Grundprinzipie der Kontinuirlichkeit und der Interpolierbarkeit. *Prinzipiell* gibt es keine mathematisch formulierbare Operationsanweisung, welche zu einem gegebenen Elementwert  $t_m$  (resp.  $z_n$ ) gehörenden *nicht beobachteten* Elementwert  $u_k$  (Temperatur) mit einer funktionsartigen Genauigkeit und in völliger Übereinstimmung mit der (*unbekannten*, weil nicht beobachteten) Realität ergäbe. *Nicht beobachtete Angaben können nur mit Wahrscheinlichkeit errechnet werden.* Diese prinzipiell als wichtig erachtete Stellungnahme wird auch anhand eines Beispiels beleuchtet:

In Szarvas wurden am 12. Juni 1964 in der Tiefe von 1 cm unter unbebauter Bodenoberfläche am überwiegend klaren Tage (um Mittag mit wenig Cu Wolken vor dem Sonnenscheibe) laut der Tabelle 1.2 die folgenden Temperaturen beobachtet:

um 10 Uhr	37,4 °C
11	39,7
12	39,0
13	40,6
14	40,0

Nehmen wir an, dass die Angabe der Beobachtung um 12 Uhr uns unbekannt ist und wir sie aus den umgebenden Uhrenwerten, oder aus den von 00 bis 24 Uhr ausgeführten 24 Angaben der stündlichen Beobachtungen errechnen wollen.

Bei Anwendung der linearen Interpolation ist

$$\text{der gesuchte Wert: } 39,7 + \frac{40,6 - 39,7}{2} = 40,15^\circ$$

mit linearer Extrapolation:  $39,7 + (39,7 - 37,4) = 42,0^\circ$

oder von der anderen Seite  $40,6 + (40,6 - 40,0) = 41,2^\circ$

mit graphischer Interpolation nach Abb. 6 vielleicht  $29,7 + 10,8 = 40,5^\circ$ , auf Grund von 24 Stundenwerten mit Sinus-Interpolation im Falle eines harmonischen Gliedes 39,2, im Falle von 2 Gliedern 41,0, von 3 Gliedern: 40,1, von 4 Gliedern: 40,0, von 5 Gliedern  $40,3^\circ$  wäre der gesuchte Wert. Soviele Resultate, als Methoden!

Es ist ein reiner Zufall, dass der tatsächlich beobachtete Wert von der mit dem ersten harmonischen Glied vorgenommenen Sinus-Interpolation mit der geringsten Abweichung angenähert wird. Es muss also wiederholt werden: welche Methode der Annäherung immer angewendet sei, die nach mathematischer Anweisung erfolgende „Errechnung“ von „nicht beobachteten“ Werten, die Annäherung an die physikalische Realität nur mit einer grösseren oder kleineren Abweichung, Streuung, Wahrscheinlichkeit erfolgen kann.

Es ist zwar prinzipiell möglich eine mathematisch formulierte Operationsanweisung zu konstruieren, worin *sämtliche wahrgenommenen Angaben enthalten sind* bis zu einer beliebigen Genauigkeit, für die Erfordernisse des praktischen Lebens ist dies aber nicht unbedingt zweckdienlich, denn die Zahl der in der Formel auftretenden Koeffizienten kann die Zahl der beobachteten Werte eventuell erreichen oder sogar übertreffen. Die Formel, die mathematisch abgefasste Operationsanweisung ist nur dann zweckmässig, wenn sie mit wenigen Koeffizienten eine gute Annäherung (mit kleiner Streuung) an die tatsächlich beobachteten Werte beschafft. *Auf Grund des Prinzips der Interpolierbarkeit nehmen wir an, dass dieselbe Formel mit derselben Streuung (Wahrscheinlichkeit) die inzwischen befindlichen, nicht beobachteten Werte, mithin die volle physikalische Realität annähert.*

Das Modell F [uzt] versieht, wie bereits betont, in seiner allgemeinsten mathematischen Formulierung eben diese Aufgabe, nämlich nicht die völlig treue Abbildung der Realität, sondern nur eine Annäherung an die physikalische Realität. Für die Praxis bedeutet jedoch eine solche allgemeine Formulierung noch nicht viel, wenn die beste Annäherung bietende Formel, die möglichst einfache mathematische Operationsanweisung fehlt. Man kann auf irgend welche beliebige explizite Form des Modells eine entsprechende Näherungsformel finden (z. B. auf Grund der Abb. 4 eine etwa von 20 cm bis 150 cm reichende Regressionsgerade), wir befassen uns aber mit der expliziten Form F  $[z_i(tu)]$ , welche die charakteristischsten Eigenschaften der obersten Bodenschichten, die Periodizität der Temperatur am anschaulichsten zum Ausdruck bringt.

Aus Messungserfahrungen, aus klimatologischen Angabenreihen ist es be-

kennt, dass die Bodentemperatur einen durchschnittlichen Tagesgang, einen durchschnittlichen Jahresgang aufweist, welche fast periodisch verläuft. Ein mehr oder weniger verschwommener oder hervortretender Rhythmus kommt aber auch an manchen konkreten Tagen vor, auch zur Zeit einer sich auf mehrere Tage erstreckenden makrosynoptischen Lage (Hitzewelle, Frostwelle): die Temperatur steigt eine gewisse Zeit an, dann sinkt sie, dann steigt sie wieder an usw. Es erscheint deshalb als natürlich die mathematische Formulierung mit trigonometrischen Reihen versuchen zu wollen, — umso mehr, als eine *jede fortlaufende Aenderung*, sei sie streng periodisch verlaufend, oder von einer sich in der Zeit ändernden Periodizität oder aber völlig aperiodisch, — nach der mathematischen Theorie mit trigonometrischen Sinus- und Cosinus-Reihen *herstellbar ist*, wenn hierbei eine genügend grosse Anzahl der sog. harmonischen Gliedern in Betracht gezogen wird.

Die Herstellung von den Beobachtungsangaben oder Durchschnittswerte anhand solcher Reihen wird in der Fachliteratur der angewandten Mathematik als *harmonische Analyse* benannt und für mechanische (ja maschinelle) Rechnung programmierbar beschrieben, z. B. von L. W. POLLAK (1926, 1928).

Im weiteren Teile dieser Arbeit wird im Zusammenhange mit unserem mathematischen Modell die von P. SCHREIBER (1901) und KERÄNEN (1941) empfohlene Bezeichnungweise angebracht.

Die Temperatur kann in jeder beliebigen Tiefe  $z$  und in jeder beliebigen Zeitdauer  $T$  mit der folgenden Entwicklung angegeben werden, in welcher bereits nur eine Veränderliche ( $t$ ) figuriert:

$$F[z(t)u] = A_{0z} + A_{1z} \sin(B_{1z} + \omega t) + A_{2z} \sin(B_{2z} + 2\omega t) + \dots + A_{nz} \sin(B_{nz} + n\omega t) + \dots \quad (1)$$

Hier bedeutet  $A_{0z}$  die *Mitteltemperatur* des Schicht-Niveaus  $z$  innerhalb einer Zeitdauer  $T$ ,  $A_{1z}$ ,  $A_{2z}$  ...  $A_{nz}$ , ... bedeuten die *Amplituden* der Teilperioden oder Teilwellen (praktisch etwa die Hälfte der Differenz zwischen dem Maximum und Minimum in Temperaturgraden ausgedrückt),  $B_{1z}$ ,  $B_{2z}$ , ...  $B_{nz}$  ... bedeuten die Phasen derselben. Die „Phase“ bedeutet den Zeitpunkt, oder jenen in Winkelgraden, eventuell in Radianen ausgedrückten Wert, wann die Sinusfunktion aus dem negativen Wertebereich in das positive übertretend den Wert von 0 aufnimmt (s. Abb. 6.). Der Winkel  $\omega\tau$  befriedigt die Gleichung

$$\omega\tau = \frac{2\pi}{T} t \quad (2)$$

wo  $\omega$  die radiale Frequenz (Kreisfrequenz) bedeutet und diese ist gleich mit der Frequenz der Temperaturänderung multipliziert mit  $2\pi$ . Für eine tägliche Aenderung ist  $\pi = 2\pi / 86\,400 \text{ sec} = 7,27 \cdot 10^{-5} \text{ sec}^{-1}$ , für den Jahreswechsel  $\omega = 2\pi / 86\,400 \cdot 365 = 1,99 \cdot 10^{-7} \text{ sec}^{-1}$ .

$T$  ist die Länge der Periode, ein Tag = 24 Stunden = 86 400 sec, oder 1 Jahr = 73 Pentaden = 365 Tage =  $3,1534 \cdot 10^7$  sec, oder eventuell eine andere Zeitdauer je nach dem Gegenstand der Untersuchung. Die  $t$  bedeutet die laufende Zeit, von einem gewissen Anfangspunkt (z. B. von Mitternacht,  $t = 0$ ) gerechnet. Für die Dauer der Periode kann dass wieder in Zeiteinheiten, Winkelgraden, oder Radianen ausgedrückt werden, z. B. für die Untersuchung der täglichen Aenderung 1 Stunde = 15 Winkelgrade =  $\pi/12$  Radiane.

Mit Hilfe eines beliebigen Kollektivs der Koeffizienten kann eine beliebige Beobachtungsangabenreihe bis zu einer beliebigen Genauigkeit mit einer präzisen Operationsanweisung, mit mathematischer Formel ausgedrückt werden:

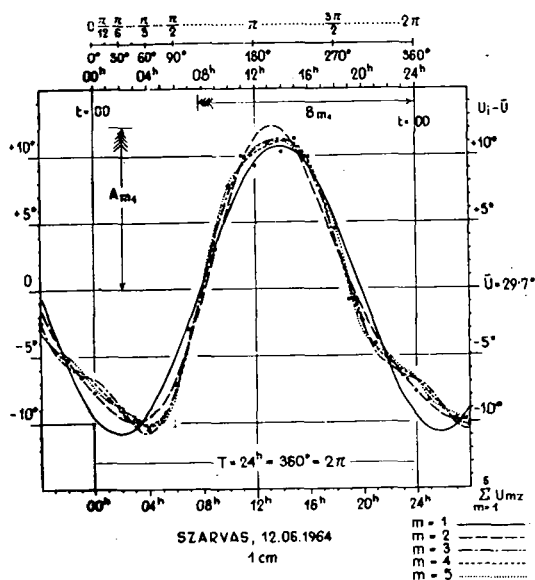


Abbildung 6. Harmonische Näherung von unter unbebauter Bodenoberfläche in der Tiefe von 1 cm anheiteren Tagen beobachteten Bodentemperaturwerte mit den ersten 1+5 Gliedern der Fourierschen Reihe. SZARVAS, 12. Juni. 1964.

$$F[z = 1(t)u] = u_{0z} + \sum_{m=1}^5 u_{mz} \\ = 29,67 + 10,74 \sin(242^\circ 27' + 15^\circ t) + \\ + 1,84 \sin(79^\circ 47' + 30^\circ t) + 1,09 \\ \sin(55^\circ 52' + 45^\circ t) + \\ + 0,38 \sin(209^\circ 56' + 60^\circ t) + \\ + 0,43 \sin(229^\circ 41' + 75^\circ t). \quad [^\circ\text{C}]$$

in der Untersuchungsperiode erhalten wir für jede Tiefe  $z_m$  je eine Gleichung in der Form unter (1), insgesamt also  $m$  Gleichungen.

In jeden Gleichungen ist die Tiefe  $z$  konstant, die Temperatur  $u$  haben wir aber in einer expliziten Form, als Funktion der  $t$  ausgedrückt. In unserem Modell wurde das folgenderweise bezeichnet:

$$F[z_m(t)u].$$

Zur Kürze wird noch die folgende Bezeichnung eingeführt:

$$A_{0z} = u_{0z} \quad \text{und} \quad A_{mz} \sin(B_{mz} + m\omega t) = u_{mz} \quad (3)$$

Demnach kann die Gleichung (1) kurz in der folgenden Form aufgeschrieben werden:

$$F\left[z_m(t)u\right] = u_{0z} + \sum_{m=1}^{\infty} u_{mz} \quad (4.1)$$

Die Dimension dieser doppelt-expliziten Form unseres mathematischen Modells  $F$  ist: Temperaturgrad  $[^\circ\text{C}]$ .

Die trigonometrische Entwicklung ist jedoch für die praktische Anwendung nur dann vorteilhaft, wenn die Beobachtungen bereits mit *einigen* harmonischen Gliedern für praktische Zwecke befriedigender Genauigkeit (Streuung) angenähert werden. Die Näherung erfolgt bei einer identischen Gliederzahl mit desto kleinerer Streuung, je mehr Temperaturgang (Tages-, Jahres-, makrosynoptischer Gang) der regelmässigen Sinusform ähnlich ist. Hauptsächlich in Durchschnittswerten von langen Perioden, sodann in Angaben von ungestörten klaren Tagen kann ein Temperaturgang erwartet werden, welcher sich in einer annähernd regelmässigen Sinusform meldet. Mit dem Zwecke der Untersuchung der schrittenweisen Annäherung haben wir die harmonischen Koeffizienten bis zu den ersten fünf Gliedern für sämtliche Niveaus unserer Tabellen I.1 und I.2 errechnet. Aus diesem geben wir die Tabelle III.



Tabelle III.

Die harmonische Koeffiziente der Bodentemperatur  
Szarvas 00—24<sup>h</sup>. 12. VI. 1964.

z	cm	0	1	2	5	10	20	30
A <sub>0z</sub>	C°	32,40	29,67	28,51	27,30	26,52	24,69	22,91
A <sub>1z</sub>		17,38	10,74	7,82	5,37	4,03	1,56	0,52
A <sub>2z</sub>		2,82	1,84	1,29	0,91	0,28	0,21	0,25
A <sub>3z</sub>		1,70	1,09	0,43	0,11	0,04	0,16	0,13
A <sub>4z</sub>		0,36	0,38	0,19	0,13	0,03	0,10	0,10
A <sub>5z</sub>		0,38	0,43	0,25	0,05	0,05	0,12	0,09
B <sub>1z</sub>	°	254	242	227	211	189	142	129
B <sub>2z</sub>		86	80	60	60	347	194	158
B <sub>3z</sub>		63	56	31	320	0	158	153
B <sub>4z</sub>		190	210	152	184	180	156	151
B <sub>5z</sub>		299	230	288	281	11	132	153

Die Gleichung (4.1) kann nun mit Inbetrachtung der ersten 5 Glieder folgenderweise aufgeschrieben werden:

$$F \left[ z_m(t) u \right] = u_{0z} + \sum_{m=1}^5 u_{mz} + \Delta \quad (4.2)$$

wo  $\Delta$  die Abweichung des gerechneten Wertes von den beobachteten Werten bedeutet. Die Abbildungen 6, 7, und 8 wurden auf Grund unserer Tabellen III. gefertigt. In diesen Abbildungen werden die tatsächlichen Beobachtungen durch Punkte, die linear interpolierten 3—3 Terminwerte nach Mitternacht durch geneigte Kreuze (x), und die mit harmonischen Gliedern erfolgende Näherung mit kontinuierlichen ausgezogenen Linien bezeichnet. In der Abbildung 6 wurde die mit 5 ausgerechneten harmonischen Gliedern erhaltene Summenkurve dargestellt, in 1 cm Tiefe, auf Grund von in Szarvas am 12 Juni 1964 ausgeführten Beobachtungen. In der Abbildung 7 und 8 ersehen wir die Kurven sämtlicher beobachteten Tiefen von 0—50 cm, jedoch nur mit Inbetrachtung der ersten zwei harmonischen Glieder.

Auf Grund unserer Abbildungen kann im Zusammenhange mit der Näherung mit harmonischen Gliedern folgendes festgestellt werden:

Die Näherung mit einem einzigen harmonischen Glied ( $m = 1$ ) ist für die Praxis noch nicht befriedigend, denn in diesem Falle wäre (da es sich um regelmässige Sinuswellen handelt) das Maximum und der Tiefpunkt (Minimum) voneinander in einer Entfernung von genau 12 Stunden. Aus den tatsächlichen Beobachtungen ist es aber ersichtlich, dass in den obersten Bodenschichten das Temperatur-maximum etwas nach der Sonnenkulmination eintritt, das Minimum aber nie um Mitternacht, oder kurz nachher, sondern in der Zeit nach dem Sonnenaufgang eintritt. In den tieferen Schichten verschiebt sich zwar allmählig der Zeitpunkt des Eintritts des Maximums und Minimums in der Zeit, die kürzere Dauer des aufsteigenden Astes der Kurve kann aber,

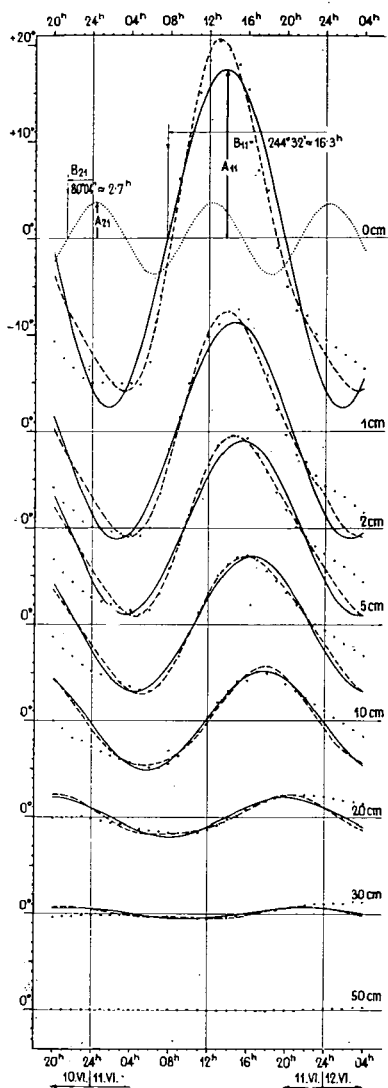


Abbildung 7. Tagesgang der Bodentemperatur bei heiterem Wetter  
S z a r v a s , 11. Juni 1964,  $F[z(t)u]$

$$- u_{0z} = \sum_{m=1}^2 u_{mz} \text{ Modell.}$$

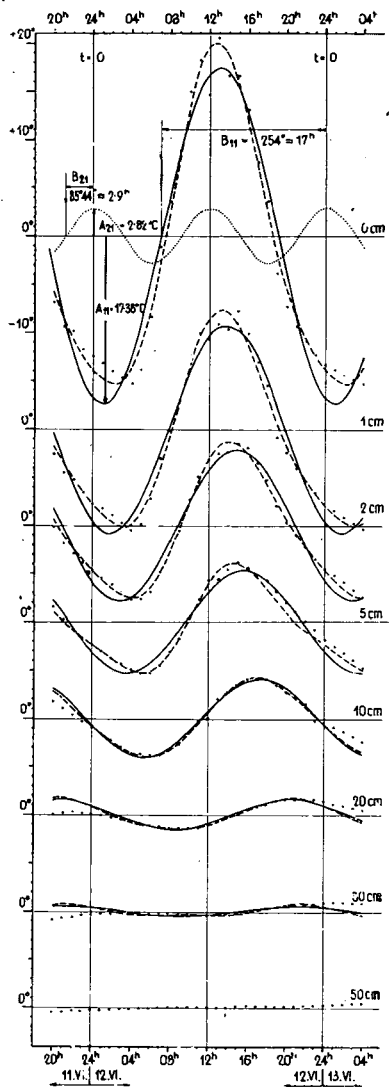


Abbildung 8. Tagesgang der Bodentemperatur bei heiterem Wetter,  
S z a r v a s , 12. Juni 1964,  $F[z(t)u]$

$$- u_{0z} = \sum_{m=1}^2 u_{mz} \text{ Modell.}$$

mit der sinkenden verglichen, selbst in einer Tiefe von 20 cm noch gut erkannt werden.

Zur Steigerung der Strengheit der Näherung ist die formale Notwendigkeit der Beibehaltung der ersten zwei harmonischen Glieder (aber nicht eine befriedigende Begründung der Daseinsberechtigung einer selbständigen physikalischen Realität) dadurch gegeben, dass damit die Lage der Extremwerte in einer bereits viel besseren Näherung sich dort meldet, wo dies von den Beobachtungsangaben benötigt wird. Die anderen Oberharmonischen (die dritte, vierte, usw. Welle) haben bloss den Charakter von Korrektionsgliedern und tragen nur in einem sehr langsamen Fortschreiten zur Genauigkeit der Näherung bei, wie das auch auf Grund der langsamen Amplitudensenkungen der Tabelle III., sowie in derselben Tabelle an den oft virtuellen Rücksprünge, an der Näherung der Wellen zu der zehntelgradigen Beobachtungsverlässlichkeit bereits erwartet werden konnte. Dasselbe erweist auch unsere Abb. 6: die dem Falle  $m = 5$  entsprechende punktierte Kurve der Gleichung (4.1) kommt den die tatsächlichen Beobachtungen darstellenden grösseren Punkten kaum näher, als die bloss zwei Harmonische enthaltende Näherungskurve ( $m = 2$ ). Bezüglich der Frage, wieviele harmonischen Glieder errechnet und beibehalten werden sollen, schwanken die Ansichten zwischen 1—5, wie dies aus der ausgezeichneten zusammenfassenden Arbeit von KERÄNEN ersichtlich ist (S. 208 des zitierten Werkes).

Um von dem Masse der Näherung und ihrer schwachen Sukzessivität eine zahlenmässige Information geben zu können haben wir auf Grund der Gleichung (4.1) für Fälle von  $m = 1, 2, 3, 4, 5$  die Stundenwerte der Temperatur auf 7 verschiedene Bodentiefen errechnet und die Abweichungen derselben von den entsprechenden beobachteten Werten ermittelt (25—25 Werte von 00 Uhr bis 24 Uhr). Demnach wurden auf Grund des bekannten Zusammenhanges der Streuung die sog. mittleren Fehler der einzelnen Messung auf Hundertstelgrade, richtiger: die ausschlaggebende Streuung

$$s = \sqrt{\frac{\sum \Delta^2}{n-1}}$$

errechnet und die erhaltenen Werte in der Tabelle IV. zusammengefasst.

Wie das zu erwarten war, nimmt die Grösse der beobachteten Streuungen mit der Tiefe ab, andererseits nimmt sie aber auch mit der Erhöhung der Zahl der beibehaltenen Harmonischen ab.

Die einige Hundertstelgrade erreichenden unregelmässig herausspringenden Werte finden eine genügende Erklärung in den im Laufe der Rechnungen angewendeten Abrundungen, andererseits können sie der Erfahrungstatsache zugeschrieben werden, dass die tieferen Schichten sich in diesen klaren, trockenen Tagen sukzessive erwärmt haben und derart die Punktreihe der Beobachtungen von etwa 10 cm nach unten in der 24. Stunde nicht zu demselben Temperaturwert zurückkam, von welchem sie um 00 Uhr startete. Dies ist auch in den Abbildungen 7 und 8 ersichtlich. Infolge dieser grösseren Abweichungen wurde das Niveau des mittleren Fehlers etwas gehoben.

Die wesentlichsten Lehren der Tabelle IV. sind die folgenden:

Selbst bei Tiefen von 20—30 cm können Streuungswerte von 0,2—0,3 Grad beobachtet werden.

Bei einer Tiefe von mehr als 5 cm nach dem zweiten Harmonischen kann

Tabelle IV.

Der mittlere Fehler der Einzelmessungen in  $^{\circ}$ 

	z	0	1	2	5	10	20	30	cm
m	1	3,19	1,53	1,01	0,65	0,29	0,30	0,30	SZARVAS
	2	1,45	0,96	0,40	0,25	0,22	0,26	0,26	12. VI. 1964
	3	1,20	0,66	0,28	0,25	0,23	0,23	0,26	
	4	1,22	0,59	0,25	0,23	0,24	0,24	0,25	
	5	1,20	0,64	0,16	0,21	0,22	0,24	0,23	
m	1	2,84	1,39	1,20	0,92	0,73	0,52	0,28	SZARVAS
	2	1,29	1,06	0,88	0,77	0,73	0,43	0,24	11. VI. 1964
	3	1,25	1,08	0,87	0,85	0,68	0,40	0,25	
		—	—	—	0,81	0,30	—	—	nach H. Z. Varga

die Genauigkeit der Annäherung nur mit Hundertstelgraden zweifelhaften Wertes verbessert werden.

An mindereren klaren Tagen mit gestörterer Strahlung können die in der Tabelle angegebenen Streuungswerte nur grösser als die angegebenen sein.

Die Genauigkeit der Annäherung, d. h. der mittlere Fehler der einzelnen Messungen erreicht bei Tiefen von 5 cm, resp. 10 cm bereits im Falle von zwei Harmonischen *etwa die Grösse*, welche von Z. VARGA H. bezüglich der Repräsentativität der Bodentemperatur gefunden wurde (s. die zitierte Arbeit), d. h.: 0,8 resp. 0,3 Grad.

Auf Grund der obenangeführten kann es behauptet werden, dass im Interesse der rational erreichbaren Genauigkeit *die Beibehaltung von bloss zwei harmonischen Gliedern genügend ist*, dies aber zu einer ohne grösseren Verzerrungen auszuführenden Bezeichnung des Zeitpunktes der Minima auch *unbedingt erforderlich ist*.

Demnach kann der tägliche Gang der Bodentemperatur in einer beliebigen Tiefe z mit einer der zehntelgradigen Genauigkeit der Beobachtungen gemäss befriedigenden Genauigkeit anhand der folgenden Formel genähert werden.

$$F [z/t/u] = u_{0z} + u_{1z} + u_{2z} = A_{0z} + A_{1z} \sin(B_{1z} + \omega t) + A_{2z} \sin(B_{2z} + 2\omega t) \quad (4.3.)$$

In den Abbildungen 7 und 8 ist der harmonische Tagesgang der Gleichung (4.3) entsprechenden (also durch Rechnung erhaltenen) Werte in den beobachteten Bodenschichten separat mit gestrichelter Linie abgebildet. Die Punkte bezeichnen die tatsächlich beobachteten Werte, die schrägen Kreuze (x) aber die für die ersten drei Stunden nach Mitternacht mit linearer Interpolation gewonnenen Werte.

Bei einem Überblick der die Temperaturen der einzelnen Bodenschichten veranschaulichenden Kurven sind die zwei seit dem Beginn der Bodentemperaturuntersuchungen wohl bekannten zwei Gesetzmässigkeiten gut ersichtlich:

1. die Amplitude des harmonischen Tagesganges nimmt mit dem Zunehmen der Tiefe allmählich ab;

2. die Phase der Temperaturwellen verschiebt sich allmählich in der Zeit, wenn die Tiefe zunimmt.

Der physikalische Grund dieser Erscheinungen ist, wie bekannt, die Tatsache, dass die Leitung der Temperatur von Molekül zu Molekül vor sich geht, und ist deshalb ein Zeit in Anspruch nehmender langsamer Prozess.

Nach der klassischen Theorie der Temperaturleitung (sie kann in jedem ausführlicheren Werk vorgefunden werden, so z. B. bei KERÄNEN im zitierten Werk) erfüllen sich für einen idealen (d. i. homogenen und isotropen) Boden die folgenden Bedingungen:

1. Die mittlere Temperatur einer beliebigen Schicht ist eine lineare Funktion der Tiefe  $z$ ;

$$A_{0z} = A_{00} + b z \quad (5.1)$$

wo  $b$  ein konstanter Koeffizient ist. Dies ist die Bedingung der Homogenität.

2. Das Abnehmen der Amplitude ist in einer beliebigen Tiefe  $z_m$  eine exponentielle Funktion von der Tiefe  $z$ :

$$A_{mz} = A_{m0} e^{-z/D} \quad (5.2.1)$$

wo  $e$  die Grundzahl des natürlichen Logarithmus und  $D$  ein konstanter Koeffizient ist. Dies wird — für beide harmonischen Glieder ausgebreitet — in einer anderen Form folgenderweise aufgeschrieben:

$$A_{1z2} = A_{1z1} \exp [-(z_2 - z_1) : D] \quad A_{2z2} = A_{2z1} \exp [-(z_2 - z_1) : D] \quad (5.2.2.)$$

3. Die Phasenverschiebung ist eine lineare Funktion der Tiefe:

$$B_{mz} = B_{m0} - z/D \quad (5.3)$$

4. Der natürliche Logarithmus des Quotienten der Amplituden ist gleich mit der Phasenverschiebung

$$\ln A_{mz} - \ln A_{m0} = B_{mz} - B_{m0} \quad (5.4.)$$

Für die natürlichen Böden erfüllen sich diese Bedingungen nicht in strenger, sondern höchstens nur in einer mehr-oder-weniger annähernden Weise. Der lebende Boden ist also nicht homogen und nicht isotrop: das bedeutet in anderen Worten, dass der in der Gleichung (5.1) auftretende Koeffizient  $b$ , sowie der in den Gleichungen (5.2.1) resp. (5.3) auftretende Koeffizient  $D$  noch irgendeine andere Funktion der Temperatur  $u$ , der Tiefe  $z$ , der Zeit  $t$ , ferner des Feuchtigkeitsgehaltes des Bodens, und eventuell auch des am Beginn der Arbeit erwähnten irgendwelchen Parameters. Unter die Elemente unseres am allgemeinsten formulierten mathematischen Modells können auch diese zwei ( $b$  und  $D$ ) Koeffizienten eingereiht werden. Das Ziel unserer gegenwärtigen Untersuchungen ist aber zum Ausdruck des zwischen den Elementen  $u$   $z$   $t$  des Modells  $F$  feststellbaren Zusammenhanges *eine mathematische Formel zu finden* auf Grund der für den idealen Boden gültigen theoretischen Gesetze der Temperaturleitung. Wenn in der gesuchten Annäherungsformel die Koeffizienten  $b$  und  $D$  vorläufig als annähernd konstant angenommen werden, so findet man, dass die Koeffizienten  $A$  und  $B$  unserer Formel 4.3 die Funktionen der Tiefe  $z$  sind. Unsere Formel (4.3) drückte dagegen aus, dass die Temperatur  $u$  eine periodische Funktion der laufenden Zeit ist. Diese zwei Näherungen verbindend kann festgestellt werden, dass die Temperatur  $u$  in einer allgemeinen Form eine Funktion (mit zwei Veränderlichen) der Tiefe  $z$  und der Zeit  $t$  ist, also:  $u = f(zt)$ .

Unsere unter (4.3) angegebene Formel (wobei für die darin aufgetretenden Koeffizienten  $A$  und  $B$  die annähernde Gültigkeit der in (5) bestimmten Bedingungen angenommen und für die Bezeichnung der Koeffizienten der

Bezeichnungsweise des obigen Systems angewendet wird) kann in die folgende Form umgeschrieben werden:

$$F[u(zt)] = A_{00} + bz + A_{10} \exp(-z/l_1) \sin(B_{10} - z/l_1 + \omega t) + A_{20} \exp(z/l_0) \sin(B_{20} - z/l_0 + 2\omega t) \quad (4.4)$$

Es ist leicht einzusehen, dass auch der Jahresgang der Bodentemperatur formell mit einer ebensolchen mathematischen Gleichung mit zwei Veränderlichen ausgedrückt werden kann, wobei bloss das Definitionsbereich des  $t$  sich sinngemäss ändert.

Die Struktur der Kurvenschar unserer Isoplethe  $F[u(zt)]$  ist — mit Beibehaltung der Prinzipien der Kontinuerlichkeit und Interpolierbarkeit — eine solche, dass durch einen jeden Punkt  $z, t_i$  der Fläche  $Z, T$  eine mit  $u_i$  Wert bezeichnete Isothermenlinie durchgeht. Mit anderem Werte — z. B.  $u_j \neq u_i$  — skalierte Isotherme kann prinzipiell nicht durch denselben Punkt  $z, t_i$  gehen, denn das würde bedeuten, dass wir prinzipiell keine Temperatur messen können, da zu dem selben unidimensionalen Geländepunkt  $z_i$  gleichzeitig mehrere Temperaturwerte gehören. Die Möglichkeit des Vorkommens solcher Fälle musste bereits oben ausgeschlossen werden, als wir bis zu infinitesimalen Grössenordnungen fortschritten.

In der Praxis wird jedoch nicht mit einer mathematischen Genauigkeit gemessen, sondern mit der Genauigkeit von  $u_i \pm 0,1^\circ$ . Aus den oben bereits behandelten Toleranzgrenzen der Interpolation, der Annäherung, sowie aus der technischen Darstellbarkeit folgt, dass die Verlässlichkeit unserer Isoplethen etwa  $u_i \pm 0,5^\circ$  ist. Deshalb konstruieren wir unsere Isoplethen im allgemeinen in Abständen von 1 Grad, in runden Temperaturwerten und wenden ausführlichere Skalierung selten an. Mit dieser Möglichkeit wird meistens nur dann Gebrauch gemacht, wenn irgendwelche feinere Eigenschaft der Struktur der Isothermen vor Augen gebracht werden soll.

Bei einer aufmerksamen Betrachtung einer bis zu grösseren Tiefen hervordringenden Isoplethe können zweierlei Systeme der Kurven identischer Skale entdeckt werden. In den geringeren Tiefen sind die Kurven meistens von einer U-Gestalt, wō der rechte Ast steiler ist als die linke. In den grösseren Tiefen verlaufen die Kurven annähernd geradelinig oder in einer milden Wellenform. Die letzteren Kurven, die eine Tagesperiodizität entweder überhaupt nicht, oder nur in sehr schwachem Masse aufweisen, gelangen meistens nichtan dem selben Tage in die Region der geringeren Tiefen.

Abbildung 9 bringt uns einige Isothermen separat gezeichnet: sie beziehen sich auf die als Beispiel erbrachten zwei klaren Sonnentage, auf Grund von in Szarvas ausgeführten Beobachtungen. Diese Isothermen wurden aus der Isoplethe der Abbildung 5 entnommen und in Teilabbildungen nebeneinander gestellt. Durch eine jede Teilabbildung werden die oben behandelten Erscheinungen in 2 nacheinander folgenden Perioden auf eine Zeit von  $2 \times 24$  Stunden bezogen veranschaulicht. Der

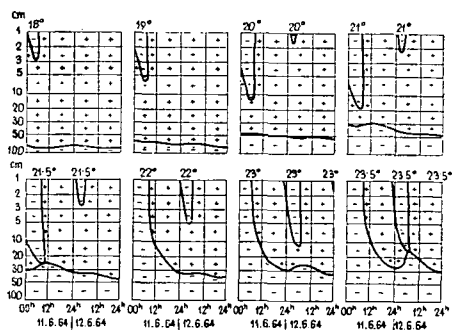


Abbildung 9. Einzelne Isothermen an zwei heiteren Sommertagen mit je einem neutralen Punkt. Szarvas, 11—12. Juni 1964, Modell  $F[u(zt)]$



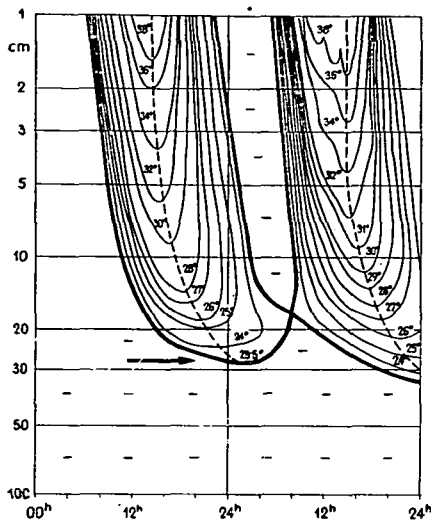


Abbildung 10. Neutraler Punkt und neutrale Linie mit Isothermen um die Zeitlinie der Minima, Szarvas, 11—12. Juni 1964.

U-gestaltige periodische Kurvenast der Isotherme von  $18^\circ$  reicht bis etwa 3 cm hinunter; die andere Isotherme desselben Wertes läuft an dem glatten, keinen Tagesperiodizität aufweisenden Zweige in einer Tiefe von mehr als 80 cm. Eine Strecke der Isotherme von  $19^\circ$  reicht bereits bis etwa 7 cm hinunter, ihre andere Strecke erhebt sich fast bis 60 cm. Diese zweierlei geartete Linie der Isotherme von  $20^\circ$  reicht bereits bis 12 cm hinunter und erhebt sich bis etwa 45 cm. Auf der folgenden Teilabbildung ist, nach der Isotherme von  $21^\circ$  die Näherung mit etwa 20 cm, resp. mit 32 cm noch grösser, wogegen an der Isotherme von  $21,5^\circ$  die zwei Linien sich in einem Punkte berühren.

Dasselbe wiederholt sich mit den Isothermen von  $22^\circ$ ,  $23^\circ$ , resp.  $23,5^\circ$ , aber bereits innerhalb der folgenden 24 Stunden. Dieser eigenartig singuläre Berührungspunkt wird als der *neutrale Punkt* benannt, denn es ist ohne Belang, ob es

zum unteren oder oberen Kurvensystem beigezählt wird.

An der Isoplethe eines idealen Bodens kommt ein solcher neutraler Punkt nicht vor, denn die Temperaturwellen reichen nach der Theorie — zwar mit einer ständig abnehmenden Amplitude — jedoch bis zur unendlichen Tiefe hinunter. Nach einiger Erwägung kann dagegen auch akzeptiert werden, dass zumindest ein solcher neutraler Punkt von der Koordinate  $z_n, t_n$  innerhalb einer jeden Periode  $T$  an einer praktischen Isoplethe vorkommt, wenn die Struktur der Isothermen eine solche ist, dass Kurven identischen Wertes teils eine ausgeprägte Periodizität, teils aber eine sehr schwache oder völlig unfeststellbare wellenmässige Wiederholungstendenz aufweisen.

Solche neutrale Punkte sind an den Isoplethen der verschiedenen Publikationen darum so selten ersichtlich, weil sie nicht unbedingt auf eine der mit rundem Grad bezeichnete Isotherme fallen und so bei der Konstruktion wegfallen. Es ist ebenfalls nicht unbedingt sicher, dass die in der Abb. 9 eingezeichneten zwei neutralen Punkte haargenau auf die Isothermen von  $21,5^\circ$ , resp.  $23,5^\circ$  fallen; auf Grund der Obenangeführten ist aber ihre Näherungsgenauigkeit etwa  $\pm 0,5^\circ$ , und deshalb haben wir keine Isotherme von  $1/100$  Grad verfertigt, wie dies an den zwei Isoplethen im Werke von ALISSOW B. P.—DROSDOW O. A.—RUBINSTEIN E. S. (Lehrbuch der Klimatologie, Berlin, 1956, S. 229. Abb. 60. bzw. 61.) vorzufinden ist.

Wie bereits erwähnt, geht über einen jeden Punkt der Ebene  $Z, T$  je eine Isolinie, dagegen können aber an dem selben Punkt keine andere Isolinien verschiedenen Wertes durchgehen. Die Isolinie, welche durch den neutralen Punkt läuft, wird die *neutrale Linie*, oder neutrale Isotherme genannt. Die Punkte des Koordinatenfeldes werden — wie von sämtlichen Isothermen —, so auch von der neutralen Linie in zwei Teile geschnitten. An den Punkten der einen dieser zusammenhängenden Flächen gehen solche Isothermen durch,

deren Wertbezeichnung niedriger ist, als jene der in Rede stehenden Isotherme, dagegen ist die Wertbezeichnung der an den Punkten des anderen Feldes durchgehenden Isothermen höher. In der Abbildung 9 sind die zweierlei Flächen mit den Zeichen von —, resp. + unterschieden.

Die Isothermen können, um ein geographisches Gleichnis zu gebrauchen, als Schichtlinien, als Isohypsen erachtet werden. Im Vergleich zu den Isothermen der Teilabbildungen ist die mit dem negativen Vorzeichen bezeichnete Fläche von einem niedrigeren, jene mit dem + Zeichen von einem höheren Niveau. An der letzten Teilzeichnung der Abbildung 9 läuft zwischen den zwei Äesten der engen „U“ ein „Tal“ von der ungefähren Richtung NNW — SSE, vom Rand der Karte gegen einen „Sattelpunkt“, gegen den neutralen Punkt. Dieser ist der höchste Punkt des Tales, er ist sein „Bergpass“. „Südlich“ von ihm liegt ein sanfter Talhang. Abbildung 10 zeigt die von den Isoplethen der Abbildung 5 herausgehobenen Isolinien der negativen Fläche. Die Setzlinie des Tales wird durch eine Punktreihe veranschaulicht. Östlich und westlich vom Geländepunkt mit dem „Höhenzeichen“ 23,5° steigt das Gelände wieder an gegen je ein „Gebirge“ der Richtung N — S (s. Abb. 11). Die — sozusagen — „Gratlinie“ wird mit einer gestrichelten Linie abgebildet.

Um das Gebiet der Gleichnisse zu verlassen, ist die Punktreihe . . . der Abbildung 10 die Zeitlinie der Schichtminima, und die gestrichelte Linie der Abb. 11 die Linie der täglichen Schichtmaxima. Die Zeitlinie der Schichtminima läuft vom Temperaturminimum der Oberflächenschicht nach hinunter und geht durch den neutralen Punkt. Tiefer, als dieser Punkt dringt das U-förmige System nicht hinunter. Wenn wir die Zeitlinie der Kleinstwerten auch unter diesen Punkt fortsetzen wollen, werden wir Isotherme nicht mehr mit steigender, sondern mit fortwährend abnehmender Gradwerten bezeichnet auffinden. Der neutrale Punkt ist also auch ein Inversionspunkt. Dies ist die physikalische Interpretation des neutralen Punktes im Sommer. (Im Winter geht die Zeitlinie der täglichen *Schichtmaxima* über den neutralen Punkt hin durch, — wie das nach einiger Erwägung eingesehen werden kann.)

Wenn man von den Oberflächenpunkt der Isotherme höchsten Wertes ausgehend an der Zeitlinie der Maxima fortschreitet, wurden Isotherme abnehmenden Wertes durchgeschnitten werden, zum Abschluss schneidet diese Zeitlinie maxima (im Sommer) am tiefsten Punkte die neutrale Linie hindurch. (An Wintertagen schneidet die Zeitlinie der Minima den tiefsten Punkt der neutralen Linie.) Von diesem Treffpunkt, also vom tiefsten Punkt der neutralen Linie kann man an einer Isokurve, (mit Gleichnis ausge-

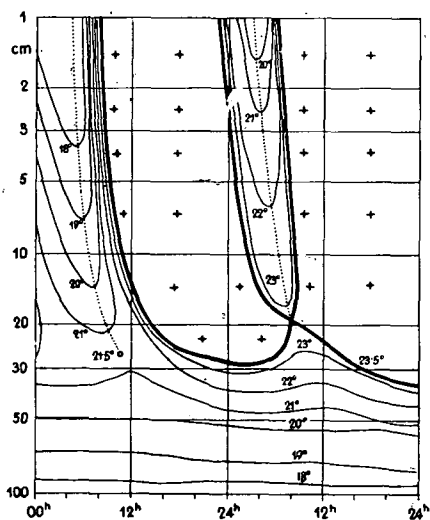


Abbildung 11. Neutraler Punkt und neutrale Linie mit Isothermen um die Zeitlinie der Maxima, S z a r v a s, 11—12. Juni 1964.

—→ maximale Tiefe der täglichen aktiven Schicht.

drückt: ohne Höhenverlust) zur anderen Extremlinie und zum täglichen neutralen Punkt gelangen.

Wenn wir die Linie der Schichtmaxima auch nach dem Treffen mit der neutralen Linie in der Richtung der tieferen Schichten fortsetzen wollen, werden die Bezifferungen der geschnittenen Isotherme immer weiter geringeren Wert annehmen. Diese, unter der neutralen Linie sich befindlichen Isotherme haben aber keine U-förmige Gestalt, diese sind eher wellenmässige flache Kurven.

Bei ideal homogenem Boden sind die Zeitlinien der täglichen Maxima und Minima gerade Linien, (GEIGER l. c. p. 34), die theoretisch bis zu einer unendlichen Tiefe parallel laufen. In den praktischen Isoplethen sind sie meistens gekrümmte Linien. In dem täglichen Temperaturgange des natürlichen Bodens haben viele Forscher (z. B. KERÄNEN, l. c. p. 207) eine grössere Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Kleinstwertes der Temperatur gefunden, besonders unter 10—30 cm. Infolgedessen laufen die Zeitlinien der Extremwerten nicht mehr miteinander parallel, sie neigen sich zueinander in einer V-förmigen Gestalt. In den praktischen Isoplethen kann man die Zeitlinien höchstens bis eine Tiefe verfolgen, wo die Amplitude der täglichen periodischen Tagesschwankung unter die Genauigkeit der Beobachtungen (z. B. unter  $0,1^{\circ}$ ) sinkt.

Das sommerliche (und als Spiegelbild das winterliche) System der neutralen Punkte und Linien kann im Nacheinander ihrer sich täglich wiederholenden Perioden nach der individuellen Auffassung des Konstrukteurs der Isoplethe mit mehreren Gleichnissen *schematisiert* werden, und zwar entweder mit dem vertikalen Schnitt von sich berührenden kelchförmigen Reihen, oder mit breiten, sich an ihren Astenden berührenden U-Formen („Wellen“) an deren Gipfeln schmale U-Formen sich befinden, oder aber mit einer Reihe von einander schneidenden breiten U-Formen.

Im ersten Falle ist die neutrale Linie die unter den die Zeitlinie der Maxima umgebenden U-förmigen Isothermen mit der niedrigsten Wertbezeichnung angegebene Kurve. Die Entfernung der beiden Aeste von U stimmt an der Oberfläche oder in der Nähe derselben (z. B. in der Tiefe von 1 cm) in der Richtung der Achse t mit der Dauer des Tageslichts überein, wobei sie aber zum Zeitpunkt des Sonnenaufganges und Sonnenunterganges gemessen (in unserem Beispiel etwas nach 04 Uhr, bzw. vor 20 Uhr) mit einer Phasenverspätung von 2—3 Stunden verschoben ist.

Die schmale U-förmige Strecke der nach der zweiten Auffassung konstruierten neutralen Linie ist das mit dem höchsten Wert bezeichnete Glied der die Zeitlinie der Minima umgebenden Kurvenschar. Die Entfernung der Aeste der U-Linie stimmt im Sommer — freilich mit einer Phasenverschiebung von

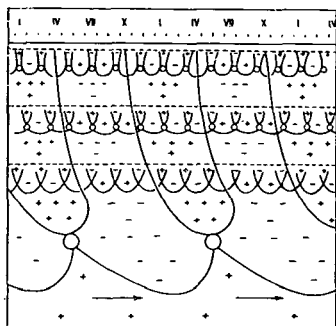


Abbildung 12. Veranschaulichung des Schemas der neutralen Linie; in der oberen Schichten + bei Tag, — bei Nacht; in größeren Tiefen --- im Sommer, +++ im Winter ———→ maximale Tiefe der jährlichen aktiven Schicht.

mehreren Stunden — ungefähr mit der Zeitdauer der Nacht überein. Im dritten Fall unseres Schemas gehört der linke Ast der sich bis zur ganzen Dauer der vollen Periode (z. B. 24 Stunden, 1 Jahr) sich ausbreitenden Kurve U zum Maximum-System des vorigen Tages (oder: zum Minimum-System der betreffenden Tages) sein steigender Ast aber zum Liniensystem des Tages des neutralen Punktes (bezw. zum Minimum-System des folgenden Tages) — nach Belieben.

Im Winter ändern sich die obenangeführten sinngemäss: die mit dem Zeichen + versehene Tagesstrecke ist enger, die mit dem Zeichen — versehene Strecke breiter, je nach der Länge des Tages und der Nacht.

Wenn nicht die typische tägliche, sondern die durchschnittliche jährliche Periodizität in Betracht genommen wird, dann müsste man bei der Charakterisierung des bis zu grösseren Tiefen hinunterdringenden Spielraumes des jährlichen neutralen Punktes und der neutralen Linie in wörtlichen Wiederholungen verfallen. Anstatt dessen betrachten wir das Schema der Abbildung 12.

Den Linien und ihrem Verlauf konnte also eine logische physikalische Erläuterung gegeben werden. Es ist vielleicht unnötig zu betonen, dass die physikalische Realität sich oft äusserst bunt und variabel gestaltet. Die Lage des neutralen Punktes bleibt — gemäss der Tiefe und der Zeit, also gemäss den Koordinaten  $z$   $t$  — nicht von Tag zu Tag die gleiche. Ein Ast der neutralen Linie läuft vielleicht in die Region der täglichen Periodizität hinauf, der andere Ast bleibt unten und überlässt seine Rolle der Linie einer neuen Wertskaale, wie z. B. in unserem Beispiel die Aenderung von  $21,5^\circ$  auf  $23,5^\circ$  war. Im Wege der Analyse der typischen Eigenschaften unseres Beispiels kann man aber zur Erkenntnis gelangen, dass eine *rein formelle Analyse* einer gut konstruierten Isoplethe dem Experten über die energetische Eigenschaften des in Rede stehenden Bodens und der Epoche *vieles verrät*. Ein Teil der Elemente unseres Modells F bestimmt die durch die Erdoberfläche aufgenommenen oder abgegebenen Energiemengen. Denken wir nur an das aktive oder passive Verhalten der Strahlungsbilanz der Oberfläche. Die physikalisch-energetischen Eigenschaften des Bodens (die Elemente von bodenphysikalischer Beziehung unseres Modells F) bestimmen dagegen, wie der Boden mit der aufgenommenen Energie wirtschaftet. Von diesen Modell- Elementen hängt es ab, in welcher Weise und bis zu welcher Zeit und Tiefe die an der Oberfläche induzierte Temperaturwelle gegen die tieferen Schichten hinunterdringt.

Das Endresultat des komplexen Effektes dieser zweierlei gearteten (äusserliche energetische und innerliche bodenphysikalische) Modellelementengruppen wird an unserer Isoplethe  $F[u(z,t)]$  wiedergegeben. *Dies ist aber bloss für den oberflächlichen Betrachtenden eine einfache Tatsachenkonstatierung beschreibenden Charakters*. Sie ist von einem energetischen Gehalt, welches nur schrittweise enthüllt werden kann, und zwar nach dem Vornehmen der Klärung und Analyse der Rolle der einzelnen Modell-Elemente. Vorläufig und zunächst ist unser Ziel die mathematische Formulierung und physikalische Definition der anscheinend formalen Eigenschaften.

In den obigen Seiten wurde die Temperaturtendenz definiert: die erste partielle Ableitung nach  $t$  von Modell F ist:

$$\tau = \frac{\partial F}{\partial t}$$

Da aber das Modell F nach der Gleichung (4.4) mit einer Funktion mit zwei Varianten angenähert wurde, welche im Grunde genommen aus dem Produkt

eines exponentiellen und eines trigonometrischen Gliedes bestand, ist seine erste Derivierte ebenfalls eine Funktion mit zwei Veränderlichen  $\tau = f_i(zt)$ , die physikalische Dimension dieser Funktion ist aber  $[^\circ \text{sec}^{-1}]$ . Die Derivation selbst kann sofort vorgenommen werden, vorerst ist es aber zweckdienlich sich mit der physikalischen Erläuterung dieses Begriffes und seines an der Isoplethe veranschaulichten Bildes zu befassen.

Zu den Punkten der Fläche Z T werden nun Funktionswerte nach  $\tau$  zugeordnet. Die zu den Punkten der bisherigen Fläche Z T zugeordnete Fläche  $\tau = f_i(zt)$  ist nicht identisch mit der Fläche  $F[u(zt)]$ , die „Dimension“ der vorherigen ist *anders* wie jene der letzteren  $[^\circ \text{sec}^{-1}]$ , bzw.  $[^\circ]$ .

Die Flächenschnitte  $u_i = \text{Konstante}$ , bzw.  $\tau_i = \text{Konstante}$  unserer sich in zwei verschiedenen Dimensionen befindlichen Flächen können auch isoplethenartig an derselben Ebene Z T dargestellt werden, es ist aber stets vor Augen zu halten, dass  $u_i = \text{Konstante}$  eine *Isotherme* bedeutet, die  $\tau_i = \text{Konstante}$  aber eine *Isotendenz-Linie*. (In der Praxis ist die Masseinheit Grad pro Stunde, oder Grad pro Tag usw. die bequemste). Für uns ist jetzt nur die Isolinie des Schnittes  $\tau = 0$  von Interesse, welche sich an beiden Flächen als Schnittlinie befindet und welche wir in den folgenden als *Extremitätslinie* bezeichnen werden.

Es ist leicht einzusehen, dass die Punktflächen  $\tau < 0$  und  $\tau \geq 0$  auch jetzt mit einer der vorigen neutralen Linie ähnlichen Trennlinie abgegrenzt werden können. Diese Abgrenzungslinie setzt sich aus der in den Abbildungen 10 und 11 auch physikalisch umgeschriebenen Maximum-Isolinie und Minimum-Isolinie (bzw. aus Verlängerungen derselben unter der neutralen Linie) zusammen, und — wenn man diese Isolinie abschliessen, die Punkte  $\tau < 0$  und  $\tau \geq 0$  überall abgrenzen will, — sich aus der Strecke einer solchen Isotherme ergänzt, die mit der t Achse möglichst parallel laufend keine tägliche Periodizität mehr zeigt. Dieser Liniestrecke entlang kann weder das Temperaturmaximum noch das Minimum mit physikalischer Strenge definiert werden. Diese Liniestrecke bedeutet aber *die letzte Grenze der Geltung der Tagesperiodizität der Temperatureffekte während des Tages* und so scheint es geeignet zu sein um die Fläche der über negative Tendenz verfügenden Punkte von jener Punktfäche abzutrennen, wo die Tendenz *nicht negativ* ist.

Das Geltendwerden (im Sommer) einer gewissen positiven Tendenz muss zugelassen werden, denn es ist eine allgemein bekannte Erfahrung, dass die Bodentemperatur unter dem Tagesperiodizitätsniveau im Sommerhalbjahr im allgemeinen ansteigt. Infolge der aperiodischen Witterungsauswirkungen kann die Tiefe der neutralen Linie und die mit der T Achse angenähert parallel laufende Isotherme von Tag zu Tag eine Fluktuation aufweisen, im Einklang aber mit unserem Näherungsverfahren erachten wir eine U-förmige schematisierung der Grenzlinie  $\tau < 0$  als zulässig umsowehr, als die mathematischen Näherungsformeln von einer ganz ähnlichen Struktur sind.

Kehren wir aber zu unseren Abbildungen 10 und 11 und zum geographischen Gleichnis zurück. Wenn wir uns zu den Schichtlinien — zu den Isothermen des Maximum- und Minimum-systems — „vom Osten nach den Westen“ fortschreitend nähern, und in dem doppelten Isothermensystem die „am meisten östlichen Punkte“ der Isothermen (Schichtlinien) der Reihe nach aufsuchen — (mathematisch formuliert: jene Punkte, wo die zur Isotherme ausgezogene Tangente mit der Achse Z parallel ist, d. h. die  $\frac{\delta F}{\delta z} = 0$  Punkte) — setzen

sich diese Punkte auch nach der Anschauung zu einer fortlaufenden Linie zusammen. (Auch das Grundprinzip der Kontinuitätlichkeit wird nicht ausser Acht gelassen: zwischen den ausgezogenen Isothermen befinden sich noch unzählige Isothermen und an jedem Punkte  $z$  der Fläche geht eine Isotherme durch). Diese prinzipiell stetige, ununterbrochene Linie wollen wir als *Inversionslinie* bezeichnen.

In den obigen wurde der Begriff des Gradienten definiert: als Gradient wird die erste partielle Ableitung nach  $z$  des Modells  $F$  genannt, und zwar mit entgegengesetztem Vorzeichen:

$$\gamma = - \frac{\partial F}{\partial z}$$

Nach den obigen Ausführungen sollte mit sehr kleinen Abänderungen alles über die Tendenz und über die Extremitätslinie wiederholt werden. Die Dimension der Funktionswerte  $\gamma = f_z(z)$  ist:  $[^\circ \text{ cm}^{-1}]$ . Ihr Ensemble ergibt ebenfalls eine räumliche Fläche in der vorhin erwähnten Dimension. Die Achse  $\gamma$  ist senkrecht auf die ebene Fläche  $Z, T$ . Der Schnitt  $\gamma = 0$  ist ebenfalls auf der Ebene  $Z, T$ . In dieser nach  $\gamma$  „notierten“ Isoplethenfläche wird das Feld der Punkte  $\gamma > 0$  und  $\gamma < 0$  von der „Isogradlinie“  $\gamma = 0$  — welche von uns *Inversionslinie* genannt wurde — ebenfalls getrennt.

Zur physikalischen Definition der Inversionslinie muss ein Bedingungssatz formuliert werden, welche aus dem obigen Begriff des Gradienten eigentlich von selbst folgt; namentlich: Die Temperaturleitung (und im energetischen Sinne: die Wärmeströmung) geht jeweils in die Richtung des positiven Gradienten vor sich und zwar unidimensionell vertikal nach unten oder nach oben.

Wo und als der Gradient Zero ist, dort und dann liegt eine Temperaturinversion vor (an unserer Isoplethe bei dem erwähnten Punkte  $z, t$ ), und zwar Wärmepunkt oder Kaltpunkt je nachdem, welche Richtung diese Wärmeströmung ober und unter diesen Punkten annimmt — wie dies in einer unserer früheren Arbeiten ausführlich beschrieben und eine logische Motivierung der Bezeichnungen gegeben wurde (WAGNER R.: Acta Climatologica Tomus IV—V, Fasc. 1—4. Seiten 19—20). Diesem muss noch beigefügt werden, dass das Ensemble der Warm- und Kaltpunkte die vorhin auch mathematisch definierte Inversionslinie bildet, womit auch die physikalische Definition der Inversionslinie gegeben ist.

In den vorigen wurde die tägliche und jährliche *neutrale Linie*, die *Extremitätslinie* und die *Inversionslinie* (alle drei auf den Tag und auf das Jahr) definiert. Im weiteren geben wir die mathematische Form, die Annäherungsformel dieser drei für den Tagesgang und Jahresgang der Bodentemperatur sehr charakteristischen Linien auf Grund der auf eine Isotherme beliebiger Skaleneinteilung oben festgestellten Näherungsformel (4.4). In dieser allgemeinen Formel war der Ausgangspunkt der Temperatur-Skaleneinteilung der Isothermen  $u = \text{Konstante der } 0^\circ$  (der Nullpunkt der Thermometerskala) und die ersten zwei Glieder  $u_{0z} = A_{0z} = A_{00} - bz$  bedeuteten die durchschnittliche Temperatur der Schicht  $z$ . Wenn die mittlere Temperatur der Schicht  $z$  bezeichnenden Glieder auf die linke Seite der Gleichung (4.4) übertragen werden, und zwar mit der Bezeichnung

$$F[u(z)] - (A_{00} + b, z) = F_i \quad (4.5)$$

wurde im Grunde genommen nichts anderes getan, als eine einfache lineare Transformation angewendet und unsere Isotherme  $u_i = \text{Konstante}$  mit den Werten der Temperaturmittel der Schicht  $z_i$  von neuem skaliert. Wenn wir



nicht bloss eine konkrete Isotherme  $u_i$  von neuem benennen, umskalieren, sondern dies auf sämtliche Isothermen  $u = \text{Konstante}$  unseres Isoplethensystems vorzunehmen wünschen, kann es ebenfalls getan werden, wobei auf sämtliche (alle) Isothermen einheitlicherweise die identische Transformation angewendet werden. Unser Isothermensystem bleibt unverändert, bloss die Skalierung der Linien wird ein anderer. Nehmen wir als Grundlage der Transformation den *neutralen Punkt* unserer Isoplethe (innerhalb je einer Periode), deren Koordinaten  $z_n$  und  $t_n$  sind und der Skalenwert der ihn schneidenden Isotherme (der neutralen Linie)  $u_n$  ist. In diesem Falle kann die obige Gleichung — welche eine noch auf alle Isothermen  $u_i$  gültige Näherungsformel ist — in der folgenden Weise aufgeschrieben werden:

$$F[u_i - u_n(zt)] = F_n = A_{10} \exp(-z/D) \sin(B_{10} - z/D + \omega t) + A_{20} \exp(-z/D) \sin(B_{20} - z/D + 2\omega t) \quad (4.6)$$

In dieser Form sind an unserer Isoplethe die folgenden vorzufinden: Isothermen mit positiver Wertbezeichnung  $u_i > u_n$ , Isothermen mit negativer Wertbezeichnung  $u_i < u_n$  und die zwei Systeme abtrennende einzige Isotherme mit 0 Zeichen, d. h. die sogenannte *neutrale Linie*. Es ist leicht einzusehen, dass in dieser Transformation die Gleichung der neutralen Linie die folgende sein wird:

$$F_n = F_0 = 0, \quad (4.7)$$

wo wir das Ausschreiben der rechten Seite von (4.6) weggelassen haben.

In unserem konkretem Beispiel, an der Abbildung 5, resp. 10 und 11 ist die Temperaturskala des neutralen Punktes  $u_n = 23,5^\circ$ , die Tiefe der neutralen Linie ist, von der Abbildung abgelesen, etwa  $z_n = 27$  cm. Laut unserer Tabelle III. ist am 12. Juni 1964 das Temperaturmittel nach den harmonischen Koeffizienten in 20 cm  $24,69^\circ$ , in 30 cm  $22,91^\circ$ , und das Temperaturmittel auf 27 cm linear interpoliert  $24,69 - (24,69 - 22,91) \cdot 0,7 = 23,44^\circ$ . Das bedeutet also, dass wir mit einer Zehntelgrad kleineren Näherung das Resultat erhalten haben, welches wir an den halbgradigen Isothermen annäherungsweise konstruiert haben:

$$u_{0z} = A_{0,27} = 23,5^\circ.$$

Nach all dies kann mit einer serienweisen partiellen Ableitung die allgemeine annähernde Gleichung der Tendenz und des Gradienten leicht aufgeschrieben werden, sowie — auf Muster der unter (4.7) angegebenen Gleichung der neutralen Linie — auch die Gleichung der Extremitätslinie und der Inversionslinie. Ausserdem können die extremalen Werte dieser wichtigen Linien bestimmt und damit für die tägliche (jährliche) *aktive Schicht* und für die tägliche (jährliche) *Inversionsschicht* die mathematische Grundlage, beziehungsweise *Definition der natürlichen thermometrischen Aufteilung der Bodenschichten* gegeben werden. Bei der Ausführung der Differentiationen ist nach den Regeln der Funktionslehre vorgegangen worden, nach gewissen, leicht verständlichen Aushebungen und Zusammenziehungen — auf die hier ebendeshalb nicht eingegangen wird — sind wir aber jeweils auf die Sinus-Ausdrucksform der Periodizität zurückgekommen auf Grund der folgenden trigonometrischen Zusammenhänge:

$$(\sin x)' = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin x + \cos x = -\sqrt{2} \sin \left( x - \frac{3\pi}{4} \right) = -\sqrt{2} \sin \left( x + \frac{\pi}{2} \right)$$

Die allgemeine Näherungsgleichung der Tendenz ist:

$$\begin{aligned} \tau = \frac{\delta F}{\delta t} = \omega A_{10} \exp \left( -\frac{z}{D} \right) \sin \left( B_{10} - \frac{z}{D} + \omega t - \frac{3\pi}{2} \right) + \\ + 2\omega A_{20} \exp \left( -\frac{z}{D} \right) \sin \left( B_{20} - \frac{z}{D} + 2\omega t - \frac{3\pi}{2} \right) \end{aligned} \quad (6.1)$$

Die allgemeine Gleichung der „Tendenz der Tendenz“ ist:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \tau}{\delta t} = \frac{\delta^2 F}{\delta t^2} = \omega^2 A_{10} \exp \left( -\frac{z}{D} \right) \sin \left( B_{10} - \frac{z}{D} + \omega t - \pi \right) + \\ + 4\omega^2 A_{20} \exp \left( -\frac{z}{D} \right) \sin \left( B_{20} - \frac{z}{D} + 2\omega t - \pi \right) \end{aligned} \quad (6.2)$$

Die allgemeine Approximationsgleichung des Gradienten ist:

$$\begin{aligned} -\gamma = \frac{\delta F}{\delta z} = \frac{\sqrt{2}}{D} A_{10} \exp \left( -\frac{z}{D} \right) \sin \left( B_{10} - \frac{z}{D} + \omega t - \frac{3\pi}{4} \right) + \\ + \frac{\sqrt{2}}{D} A_{20} \exp \left( -\frac{z}{D} \right) \sin \left( B_{20} - \frac{z}{D} + \omega t - \frac{3\pi}{4} \right) \end{aligned} \quad (7.1)$$

Die allgemeine Gleichung des „Gradienten des Gradienten“:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \gamma}{\delta z} = \frac{\delta^2 F}{\delta z^2} = \frac{2}{D^2} A_{10} \exp \left( -\frac{z}{D} \right) \sin \left( B_{10} - \frac{z}{D} + \omega t - \frac{3\pi}{2} \right) + \\ + \frac{2}{D^2} A_{20} \exp \left( -\frac{z}{D} \right) \sin \left( B_{20} - \frac{z}{D} - 2\omega t - \frac{3\pi}{2} \right) \end{aligned} \quad (7.2)$$

Die allgemeine Gleichung der „Tendenz des Gradienten“, oder — was das selbe bedeutet: des „Gradienten der Tendenz“ ist:

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 F}{\delta z \delta t} = \frac{\delta^2 F}{\delta t \delta z} = \frac{\sqrt{2}}{D} \omega A_{10} \exp \left( -\frac{z}{D} \right) \sin \left( B_{10} - \frac{z}{D} - \omega t - \frac{\pi}{4} \right) + \\ + \frac{\sqrt{8}}{D} \omega A_{20} \exp \left( -\frac{z}{D} \right) \sin \left( B_{20} - \frac{z}{D} - 2\omega t - \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

Mit einer leicht einzusehenden Begriffsverallgemeinerung bedeutet die „Tendenz der Tendenz“ und die „Tendenz des Gradienten“ nach der Erweiterung unserer Definition eine weitere partielle Ableitung der Funktion nach  $t$ , und ähnlicherweise ist der „Gradient des Gradienten“ und der „Gradient der Tendenz“ nichts anderes als eine weitere partielle Derivation der Funktion nach  $z$  mit der Hinzufügung, dass hier das Vorzeichen nicht in Betracht genommen wird, wie bei der Definition.

In jedem der mit den Gleichungen (4.6), (6.1) und (7.1) bestimmten drei Liniensystemen gibt es je eine Speziallinie, nämlich jene, die in den obigen mit dem Wert 0 bezeichnet wurde. Die annähernde Gleichung dieser Linien ist — mit der Weglassung der ausführlichen Ausschreibung — die folgende:

$$\begin{aligned} \text{Die Gleichung} \\ \text{„} \quad \text{der neutralen Linie } F_0 = F_n = 0 \quad [C^\circ] \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\text{der Extremitätslinie } T_o = \frac{\delta F_o}{\delta t} = 0 \quad [C^\circ \text{ sec}^{-1}] \quad (6.1.1)$$

$$\text{der Inversionslinie } \gamma_o = \frac{\delta F_o}{\delta z} = 0 \quad [C^\circ \text{ cm}^{-1}] \quad (7.1.1)$$

In dem auf der obigen Weise transformierten Koordinatensystem ist die formale Übereinstimmung zwischen dem mathematischen Ausdruck der Isothermen, der Isotendenzen und den Isogradlinien vollkommen. Die annähernde mathematische Form der drei Liniensystemen ist eine mit den Koordinaten  $z$  und  $t$  angegebene Funktion. Eine jede der Funktionen besteht aus je zwei Gliedern (Summanden) und ein jedes Glied aus den Multiplikatoren von je zwei Faktoren. Einer der Faktoren bestimmt die Grösse der Amplitude, die zweite gibt die Periodizität und deren Phasen. Unsere Gleichungen (4.6), (6.1), (6.2), (7.1), (7.2) und (8) sind also solche Näherungsfunktionen, welche voneinander nur in der Grösse der Amplitude und in ihrer Phase (im Argument des Sinus) abweichen.

Wenn also die Struktur der mathematischen Form unserer Speziallinien  $F_o$ ,  $\tau_o$  und  $\gamma_o$  identisch ist, so ist es evident, dass auch ihr in demselben Koordinatensystem  $Z T$  dargestelltes geometrische Bild analog sein wird, nämlich mit anderen Phasen und Amplituden sich meldende mehr-oder- weniger verzerrte U-Formen.

Da unsere Kurven (schematisch dargestellt) eine im grossen und ganzen sich nach links neigende U-Form zeigen (Abb. 13.) kann zu ihnen eine mit der Achse  $t$  und  $z$  parallele Tangente gezogen werden. Die Lage und Zeit des Berührungspunktes — d. h. also die extremen Werte der Linien — können mit den obigen Differentiationen festgestellt werden, wenn die Gleichungen (6.2), (7.2), resp. (8) mit Zero gleich genommen werden. Die maximale Tiefe der neutralen Linie liegt dort, wo die Ableitung der Funktion  $F_o = 0$  (nach  $t$  deriviert) bei Zero liegt, d. h.:

$$\frac{\delta F_o}{\delta t} = 0 \quad (6.1.1)$$

wobei natürlich beide Gleichungen nach (6.1) (6.2) ausführlich ausgeschrieben vorgestellt werden können.

Auf Grund unserer obigen Erwägungen kann man auch die maximale Tiefe der Extremitätslinie feststellen Diese ist dort, wo der Ausdruck  $\tau_o = 0$  nach  $t$  deriviert gleich Zero ist, d. h.:

$$\frac{\delta \tau_o}{\delta t} = \frac{\delta^2 F_o}{\delta t^2} = 0 \quad (6.2.1)$$

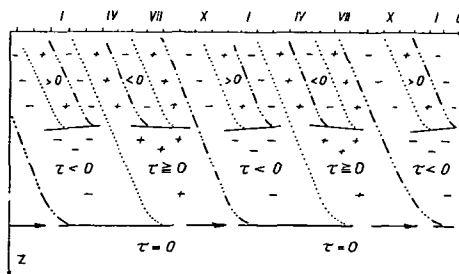


Abbildung 13. Darstellung des Schemas der Grenzlinie der periodischen Effekte in Beziehung auf Tag und Jahr.

————→ durchschnittliche Tiefe der jährlichen aktiven Schicht in Ungarn cca 18 m.

Da jedoch von dieser Linie festgestellt wurde, dass sie die extreme Grenze der Geltung der Tagesperiodizität der bei Tageslicht auftretenden Temperatureffekte bedeutet, sind diese Gleichungen zugleich auch der *mathematische Ausdruck der maximalen Tiefe der täglichen (jährlichen) aktiven Schicht*.

Mit der Anwendung eines vollkommen ähnlichen Gedankenganges kann es behauptet werden, dass die *maximale Tiefe der Inversionslinie* sich dort befindet, wo die Derivierte der Annäherungsfunktion  $\gamma_0 = 0$  (nach  $t$  deriviert) Zero ist, d. h.:

$$\frac{\partial \gamma_0}{\partial t} = \frac{\partial^2 F_0}{\partial z \partial t} = 0 \quad (8.1)$$

Diese Gleichung ist der *mathematische Ausdruck der maximalen Tiefe der täglichen (jährlichen) Inversionsschicht*.

Die in diesen drei Gleichungen auftretenden Koeffizienten A und B können auf Grund der Gleichung (4.3) mit den ersten Gliedern der harmonischen Analyse aus den Beobachtungsangaben mit zufriedenstellender Genauigkeit bestimmt werden, wie dies in den obigen ausführlich dargelegt wurde.

Der Koeffizient D kann auf Grund der beobachteten Werte von je zwei Schichten aus den harmonischen Koeffizienten ebenfalls ausgerechnet werden, sogar in zwei Weisen, und zwar: entweder aus der Abnahme der Amplitude auf Grund der Gleichung (5.2.2), oder aus der Phasenverschiebung auf Grund der Gleichung (5.3.2). Wie bereits oben mitgeteilt, führen diese zweierlei Rechnungen hinsichtlich der natürlichen Böden zu nicht vollkommen identischen Resultaten. Die ausführliche Darlegung dieses Umstandes führt jedoch zu einem anderen Gebiet, wo nicht nur die thermischen, sondern auch die kalorischen Eigenschaften des Bodens, also der *energetische Schichtenbau der natürlichen Böden* mit Hilfe unseres mathematischen Modells untersucht wird.

## LITERATUR

- ALISSOW, B. P. — DROSDOW, O. A. — RUBINSTEIN, E. S.: Lehrbuch der Klimatologie. S. 229., Berlin 1956.
- GEIGER, R.: Das Klima der bodennahen Luftschicht. Ein Lehrbuch der Mikrometeorologie. Braunschweig 1961.
- KERÄNEN, J.: Wärme- und Temperaturverhältnisse der obersten Bodenschichten. Einführung in d. Geophys., 1929.
- POLLAK, L. W.: Rechentafeln zur harmonischen Analyse. Leipzig 1926. — Handweiser zur harmonischen Analyse. Prager Geophysikalische Studien. Prag, 1928.
- SCHREIBER, P.: Studien über Erdbodenwärme. Jb. Sächs. Meteor. Inst., Chemnitz 1901.
- VARGA, H. Z.: Die Streuung der Bodentemperatur. Időjárás, 64, 1960., S. 375.
- WAGNER, R.: Die Temperatur des Bodens, des Wassers und der Luft in K o p á n c s. I. Acta Climatologica, IV—V. Szeged 1965.